SECRETARIA DE EDUCACIÓN PUBLICA
SUBSECRETARIA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

DIRECCIÓN DE BACHILLERATOS ESTATALES Y PREPARATORIA ABIERTA

DEPARTAMENTO DE PREPARATORIA ABIERTA

MATEMÁTICAS IV

GUIA DE ESTUDIO

Compilado por: Mtra. Herlinda Bravo Moreno

MAYO 2010, PUEBLA

MATEMÁTICAS IV

CONTENIDO TEMATICO		
UNIDAD	**MODULO**	**TEMA**
Unidad XIII FUNCIONES CIRCULARES	Módulo 1	Circunferencia unitaria
	Módulo 2	Valores de las funciones circulares
	Módulo 3	Gráfica de las funciones seno y coseno
	Módulo 4	Identidades Fundamentales
Unidad XIV FUNCIONES CIRCULARES DE SUMA Y DIFERENCIA DE NUMEROS REALES	Módulo 5	Coseno de la diferencia de dos números
	Módulo 6	Funciones circulares de la suma de números reales
	Módulo 7	Funciones circulares del doble y la mitad de un número
	Módulo 8	Transformación de productos a sumas
Unidad XV FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA	Módulo 9	Funciones exponenciales y logarítmicas
	Módulo 10	Función Logarítmica
	Módulo 11	Logaritmos comunes y de las funciones trigonométricas
	Módulo 12	Aplicaciones de la función exponencial
Unidad XVI RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS	Módulo 13	Valores y aplicaciones de las funciones circulares
	Módulo 14	Interpretación geométrica de las funciones circulares
	Módulo 15	Aplicación de las funciones circulares a la resolución de triángulos
	Módulo 16	Teorema de los cosenos

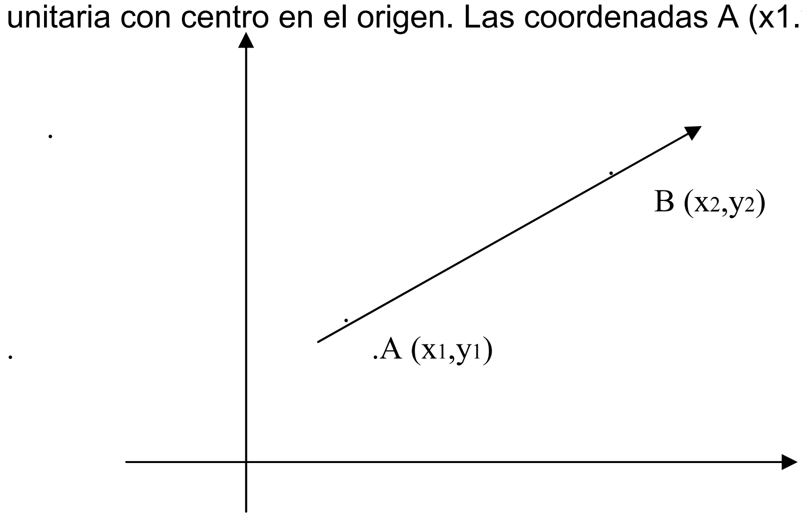
MATEMATICAS IV

UNIDAD XIII
FUNCIONES CIRCULARES

Modulo 1
Circunferencia unitaria

OBJETIVO
Calcular la distancia entre dos puntos, circunferencia unitaria y funciones circulares.

El hombre al tener la necesidad de medir utiliza las herramientas de las matemáticas y una de ellas es la trigonometría que significa “medición de triángulo”se encuentran implícitas las funciones trigonomètricas y circulares. La aplicación de las circulares es la distancia entre dos puntos, las coordenadas rectangulares en el plano cartesiano forman la ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el origen. Las coordenadas A (x1.y1) y B (x2.y2)



Para encontrar la medida de la distancia del segmento AB se utiliza el Teorema de Pitágoras.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo:

La distancia entre los puntos A (3 , 8) y B (5 , 9).

$$AB = \sqrt{(5 -- 3)^2 + (9 -- 8)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$= 1.7$$

1.1.2 CIRCUNFERENCIA UNITARIA

Es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia, con punto de origen 0 (0, 0) y de radio uno $x^2 + y^2 = 1$

La ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el origen es :

$$C = \{ (x , y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

1.2 FUNCIONES CIRCULARES

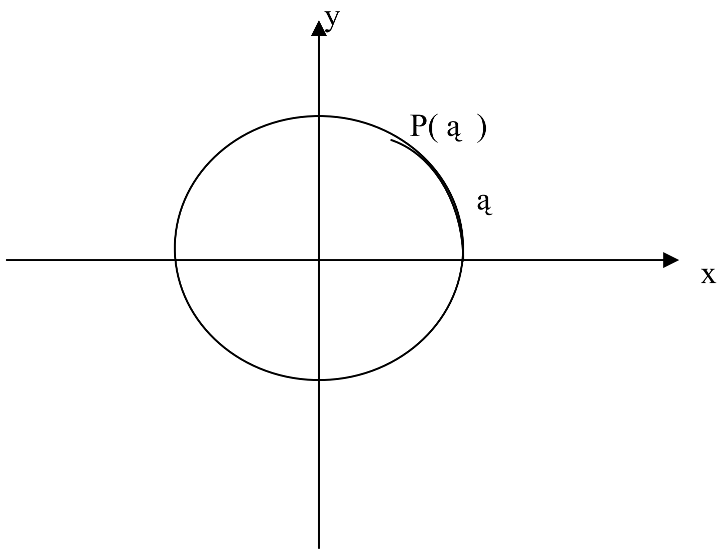
La longitud de una circunferencia esta dada por la expresión C = 2πr. Donde "r" es la medida del radio correspondiente; ésta expresión nos permite determinar la longitud de la circunferencia unitaria al sustituir "r" por 1.

C = 2π . 1 unidades

C = 2π unidades

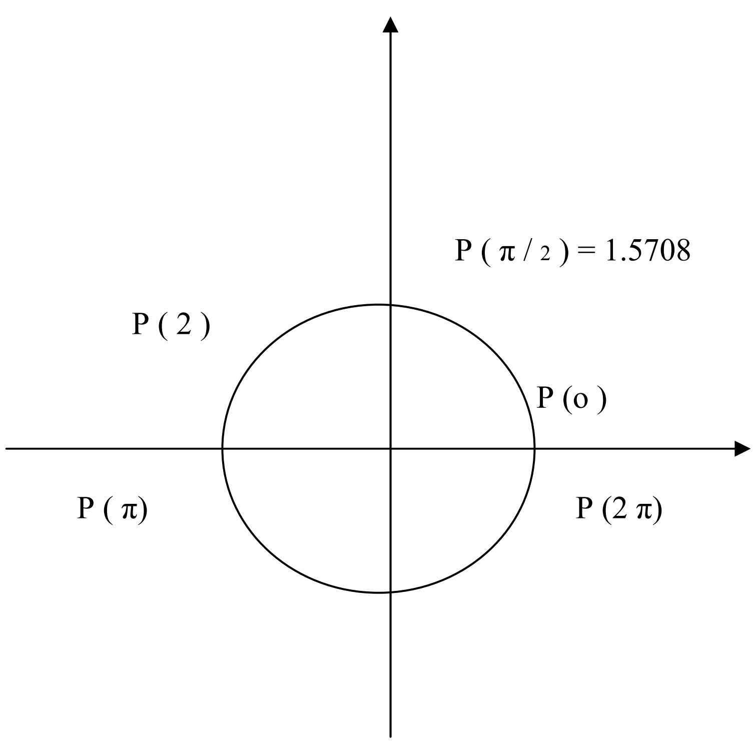
La longitud del arco es: $|ą| > 2\pi$ ($ą > 2\pi$ ò $ạ < -2\pi$)

Cada arco tiene un punto terminal y cada arco se representa por un único número real, genera una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales (ą € R) y su contradominio el conjunto de los puntos en la circunferencia unitaria [P(a)] Los puntos se representan en dos formas (x,y) posición respecto a los ejes coordenados y P(ą) ubica cada punto indicado en su distancia a (1,0) y se resume con la igualdad P(ą) = (x ,y)



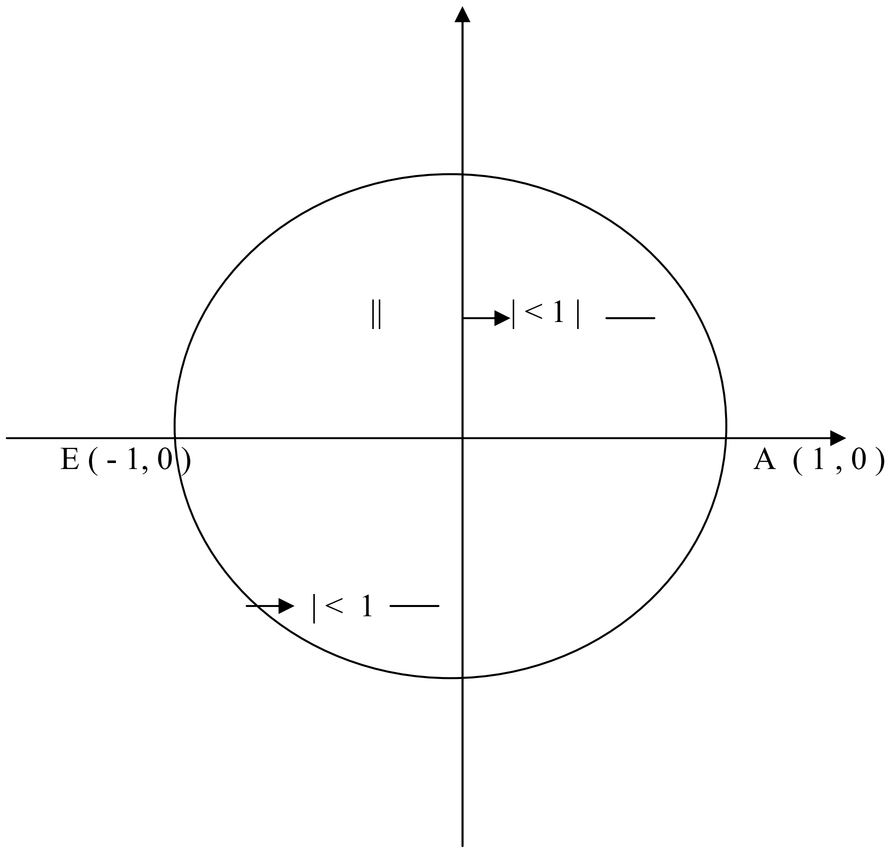
1.2.1 LOCALIZAR PUNTOS EN C.

П Carece de representación por ser un número irracional sólo se aproxima, $\pi = 3.1416$ O $22/7$ cual sea el número racional utilizado. La longitud de la circunferencia unitaria es $C = 2\pi$, como se muestra en figura sobre la los ejes coordenados.



1.3 DEFINICION DE SENO Y COSENO

La función coseno tiene como dominio al conjunto de los números reales y como contradominio al conjunto de las "x" de los puntos de la circunferencia unitaria, siendo la longitud del radio igual a 1 ($r = 1$), los puntos más alejados del eje "y·" son : A (l,0) y E (- 1 , 0) , están a una unidad del mismo y el contradominio de esta función es:
(xa € R | -1 ≤ x ≤ 1) Como se muestra en la figura.

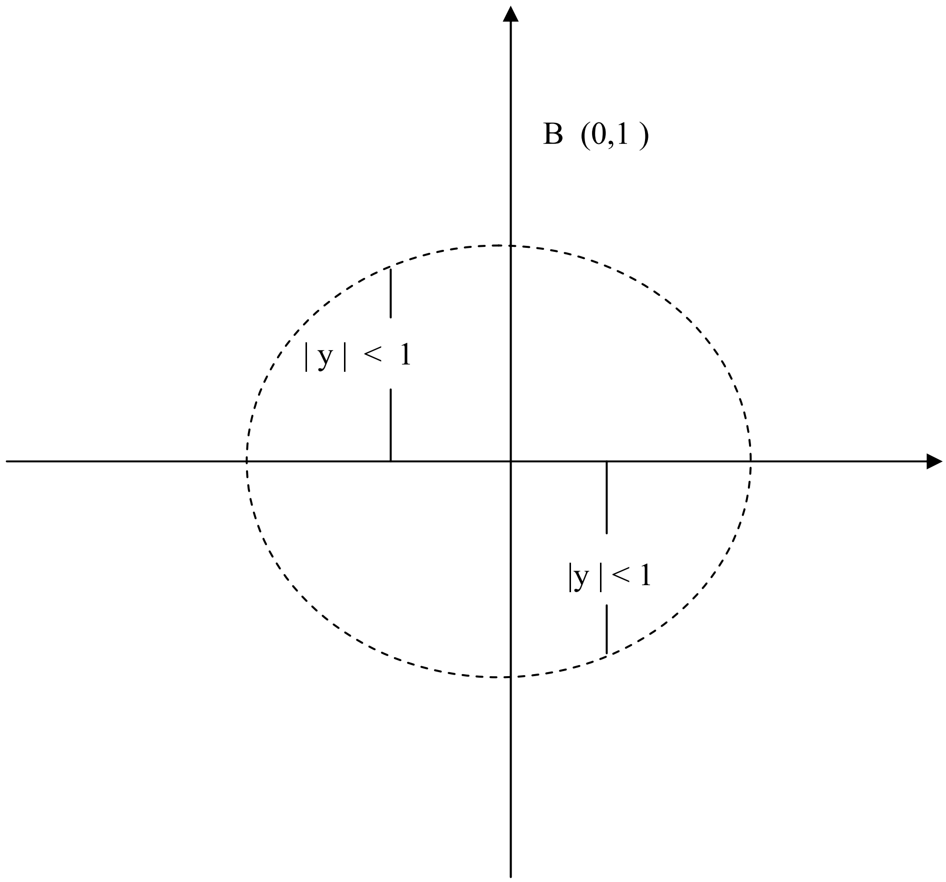


El coseno en la pràctica con signo positivo.

X =cos α , α € R , - 1 ≤ x ≤ 1

Función coseno
El dominio es también el conjunto de los números reales (R) y su contradominio esta constituido por las "y".
Si P (α) = (x, y) es un punto de la circunferencia unitaria
y = sen α , α € R

Es la ecuación que define a la función seno.



La ecuación que define a función tangente es:

$$Tg = \frac{Sen \quad \alpha}{Cos \quad \alpha} \quad , \quad \cos \quad \alpha \neq 0$$

Las tres funciones que se mencionan a continuación están dadas en términos de las coordenadas del punto terminal   P (α)

Cotangente, $\cot \alpha = \frac{x}{y}$ $y \neq 0$

secante , $\sec \alpha = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$

cosecante, $\csc \alpha = \frac{1}{y}$ $y \neq 0$

Determinación de las funciones reciprocas

$$\text{Si sen } \alpha \neq 0;\ \ \cot \alpha = \frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Sen } \alpha} \ \text{ ò } \ \cot \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \ \text{ ò } \ \text{tg } \alpha \ \ \cot \alpha = 1$$

$$\text{Si cos } \alpha \neq 0;\ \ \sec \alpha = \frac{1}{\text{Cos } \alpha} \ \text{ ò } \ \cos \alpha \ \ \sec \alpha = 1$$

$$\text{Si sen } \alpha \neq 0;\ \ \csc \alpha = \frac{1}{\text{Sen } \alpha} \ \text{ ò } \ \text{sen } \alpha \ \ \csc \alpha = 1$$

1.3.1 SIGNO DE LAS FUNCIONES CIRCULARES EN CADA UNO DE LOS CUATRO CUADRANTES.
Primero y tercer cuadrante son positivos, segundo y cuarto son negativos.

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

a) Encontrar la distancia entre los puntos que se mencionan.
   1) (4,5) y (6,10)
   2) (8,4) y (2,-8)
   3) (6,-5) y (4,9)
   4) (-4,-7) y (-6 , 7)

b) Demostrar que los puntos A (3 , 8), (5 , 9) y (4 , 6) son los vértices de un triángulo isósceles.

c) Localizar aproximadamente los siguientes puntos en la circunferencia unitaria.
   P ($9\pi/ 6$)
   P (2π)

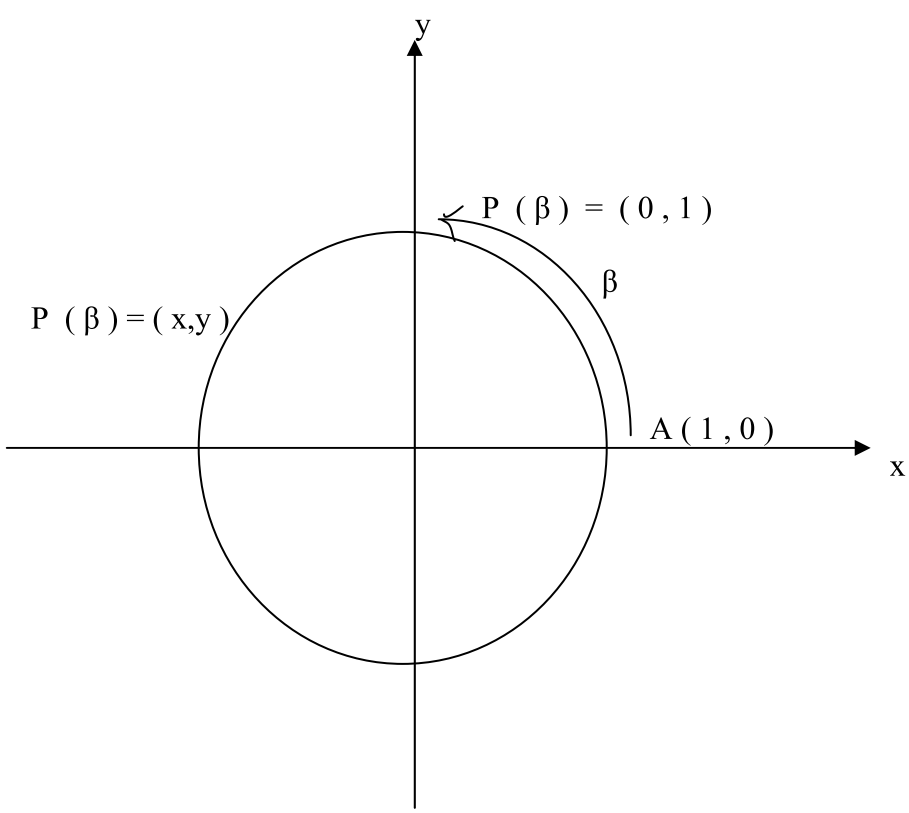
UNIDAD XIII
FUNCIONES CIRCULARES

Modulo 2
Valores de las funciones circulares

OBJETIVO
Calcular las funciones circulares de los arcos, determinar e4l valor y las coordenadas de los puntos terminales.

2.1 VALORES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES

Las coordenadas x y y son los valores funcionales del número real β; donde cos β = x, sen β = y son puntos terminales, los arcos cuadrantes se encuentran en el punto terminal de la frontera de dos cuadrantes. Como se muestra en la figura.



Los valores de las funciones circulares se presentan en la siguiente tabla

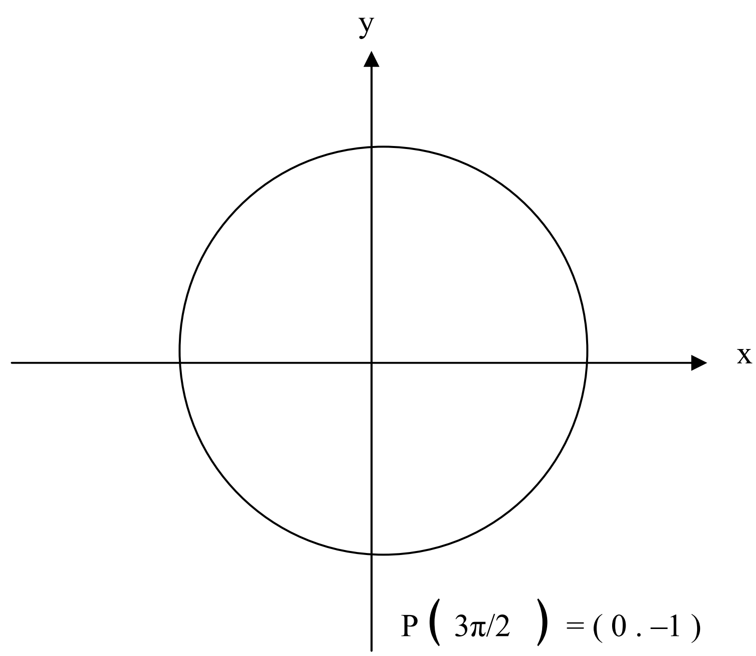
β	P (x , y)	Cos β	Sen β
0	(1 , 0)	1	0
π / 2	(0 , 1)	0	1
π	(-1 , 0)	-1	0
3 π/ 2	(0 , - 1)	0	-1
2 π	(1, 0)	1	0

Identidades trigonomètricas de tg β , sec β y csc β

$$\text{Tg } \beta = \frac{\text{Sen } \beta}{\text{Cos } \beta} \quad , \quad \sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} \quad \text{y} \quad \csc \beta = \frac{1}{\text{sen } \beta}$$

Aplicaciones de las identidades trigonomètricas

Ejemplo:
Encontrar el valor exacto de csc 3 π/ 2
Solución : Se establecen las coordenadas del punto terminal de la circunferencia unitaria que corresponde a la longitud del arco π

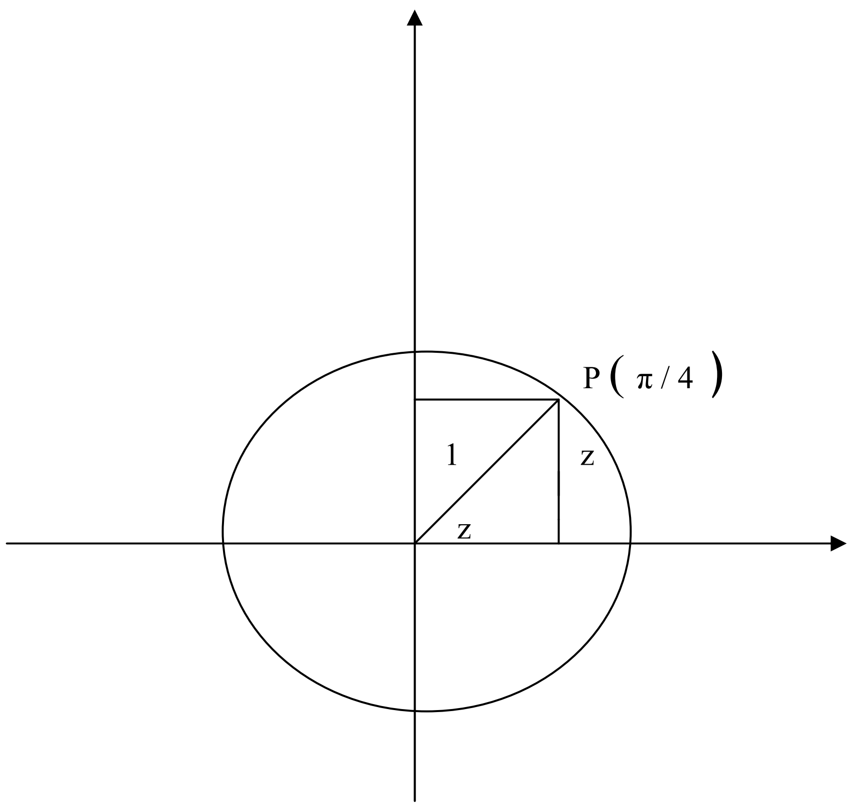


Aplicación de la identidad trigonomètrica respectiva.

$$\text{Csc}\quad 3\,\pi/\,2 = \frac{1}{\text{Sen}\ 3\,\pi/\,2} = \frac{1}{-1} = -1$$, el valor encontrado de csc $3\,\pi/\,2 = -1$

2.2 VALORES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES PARA ARCOS π/ 4 , π/ 6 , π / 3 Y SUS MÚLTIPLOS

Calculo de coordenadas de puntos terminales de arcos cuyas longitudes son algunos múltiplos o submúltiplos de π
Calculo de las coordenadas del punto terminal correspondiente al arco de longitud π/ 4
Solución: Representación del punto , trazo del segmento de recta perpendicular a ambos ejes y pase por el punto P (π/ 4) , resulta un cuadrado y se justifica por geometría plana, al trazar la diagonal se forma un triángulo rectángulo , se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el resultado.



El punto esta localizado exactamente ala mitad de π / 2 y queda en el punto medio del arco de la circunferencia del primer cuadrante .

El triángulo rectángulo tiene dos catetos iguales y su longitud esta designada por "z" al aplicar el teorema de Pitágoras se obtiene el resultado.

$z^2 + z^2 = 1^2$; luego $2z^2 = 1$ por tanto

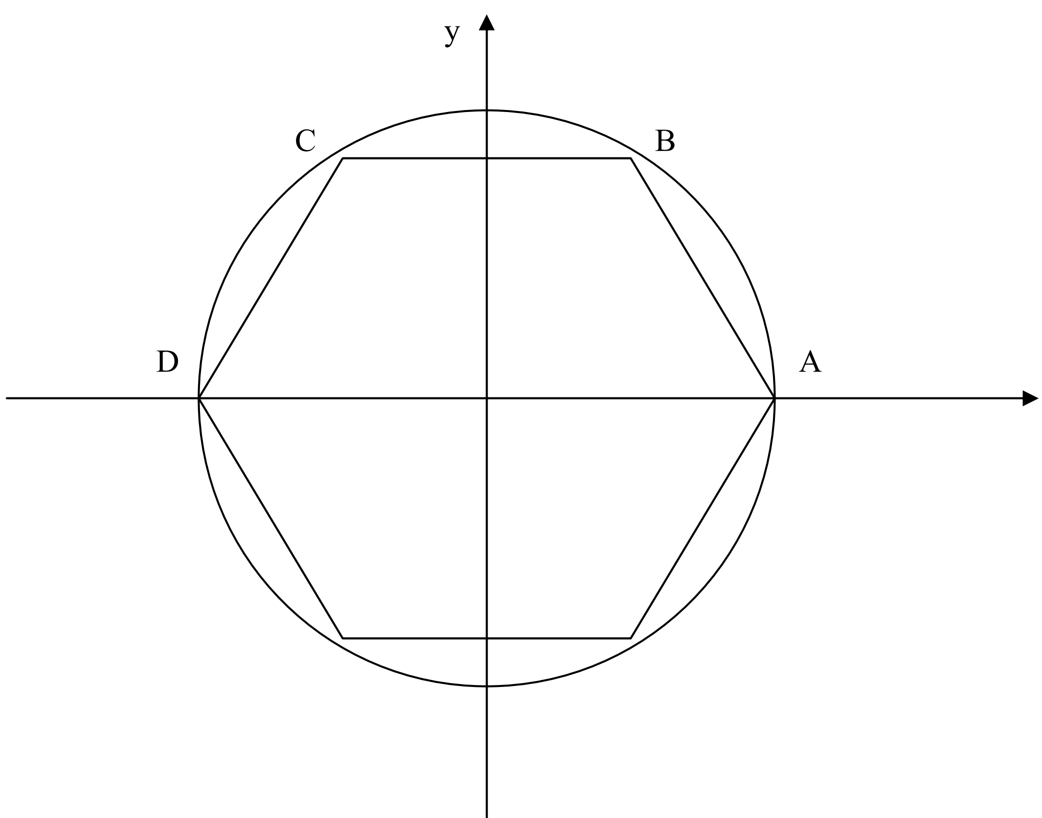
$z = \sqrt{1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ este resultado es la longitud de cada cateto.

Se determinan las coordenadas de cada cateto del punto $P(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

En otros ejercicios el resultado es el mismo sólo cambia el signo de acuerdo al cuadrante donde este ubicado el punto terminal.

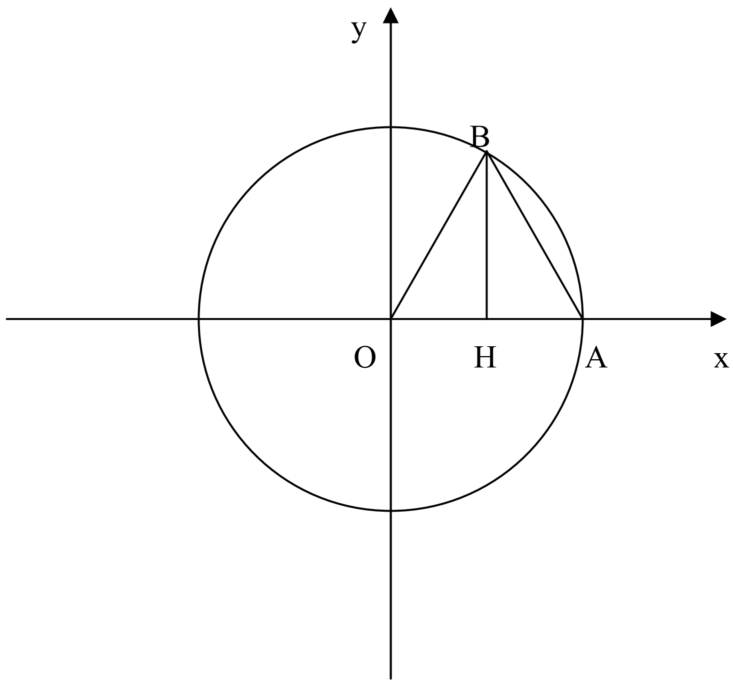
Calcular las coordenadas del punto terminal correspondiente al arco de longitud π/ 3.l

Solución: En una circunferencia unitaria cuyo centro coincida con el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, se trazan las cuerdas de un hexágono regular inscrito de longitud AB , BC , CD, de longitud unitaria y las cuerdas contiguas DE , EF y FA . Cada lado del hexágono es igual a la longitud del radio, se tienen seis arcos y cuerdas de igual medida. En consecuencia la longitud del arco AB es la sexta parte de la distancia que se mide alrededor de la circunferencia. Longitud del arco AB = 1 / 6 (2π) = π / 3, Como se muestra en la figura.



E F

Se toma la cuerda AB y se traza el radio OB , se obtiene el triángulo equilátero AOB por construcción, el radio OA = OB = AB = 1 al trazar la perpendicular desde B hasta el eje x representado el punto de intersección por la letra H , OH = 1 / 2 , al aplicar el Teorema de Pitágoras se calcula la longitud entre los puntos B y H .



$OB^2 = OH^2 + BH^2$ Al sustituir valores numéricos se tiene :

$BH^2 = OB^2 + {}^2$

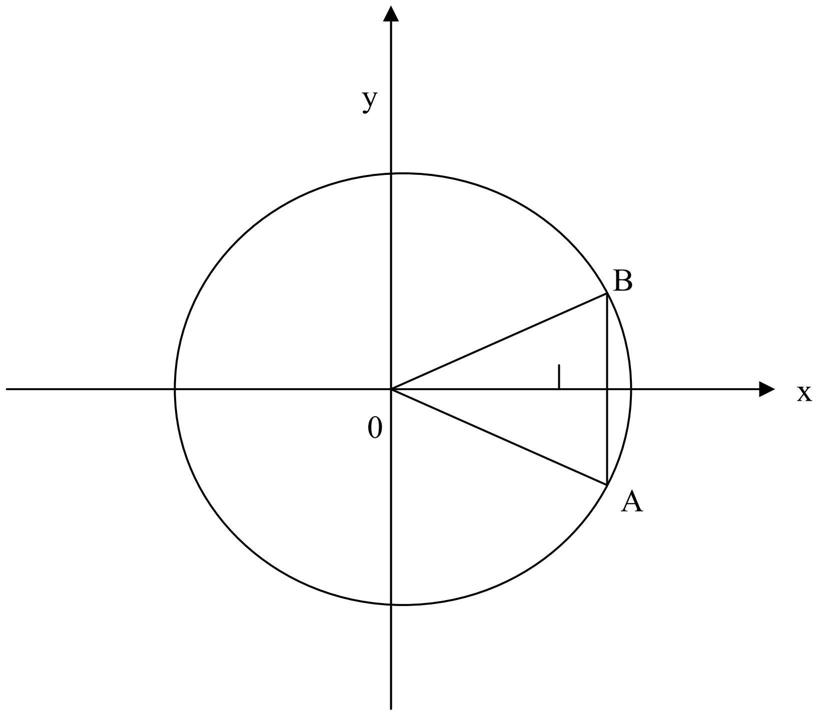
$$BH = \sqrt{1 - \left(1/2\right)^2} = \sqrt{1 - 1/4}$$

$$= \sqrt{3/4}$$

$$BH = \sqrt{OB - OH}$$

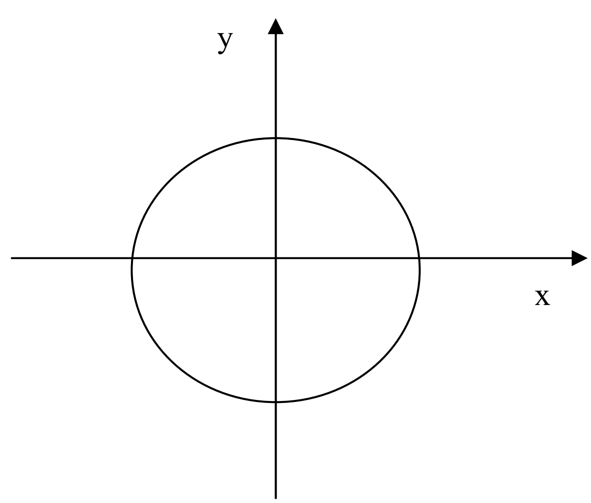
Las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo OBH y las coordenadas del punto B son:

P $\left(\pi/3\right) = \left(1/2\ ,\ \sqrt{3}/2\right)$ Las coordenadas en los otros cuadrantes son las mismas sólo cambian de signo de acuerdo en donde se ubique el punto terminal.
Las coordenadas del punto terminal asociado al arco de longitud $\pi/6$ se coloca el triángulo equilátero OAB como se muestra en la figura:



El eje x intersecta al arco en su punto medio y la cuerda se divide en dos partes iguales , B1 = 1A = 1 / 2 unidades de longitud , con la aplicación del Teorema de Pitágoras se calcula que 01 = $\sqrt{3}/2$ por lo tanto las coordenadas del punto terminal asociado con el arco $\pi/6$ son $(\sqrt{3}/2\ ,\ 1/2)$. Estas coordenadas son las mismas para cualquier cuadrante sólo cambian los signos de acuerdo a donde se ubique el punto terminal

Ejemplo . Encontrar el valor exacto de tg $5\pi/4$
Solución : Se muestran las coordenadas del punto terminal en la circunferencia unitaria, asociado al arco $5\pi/4$



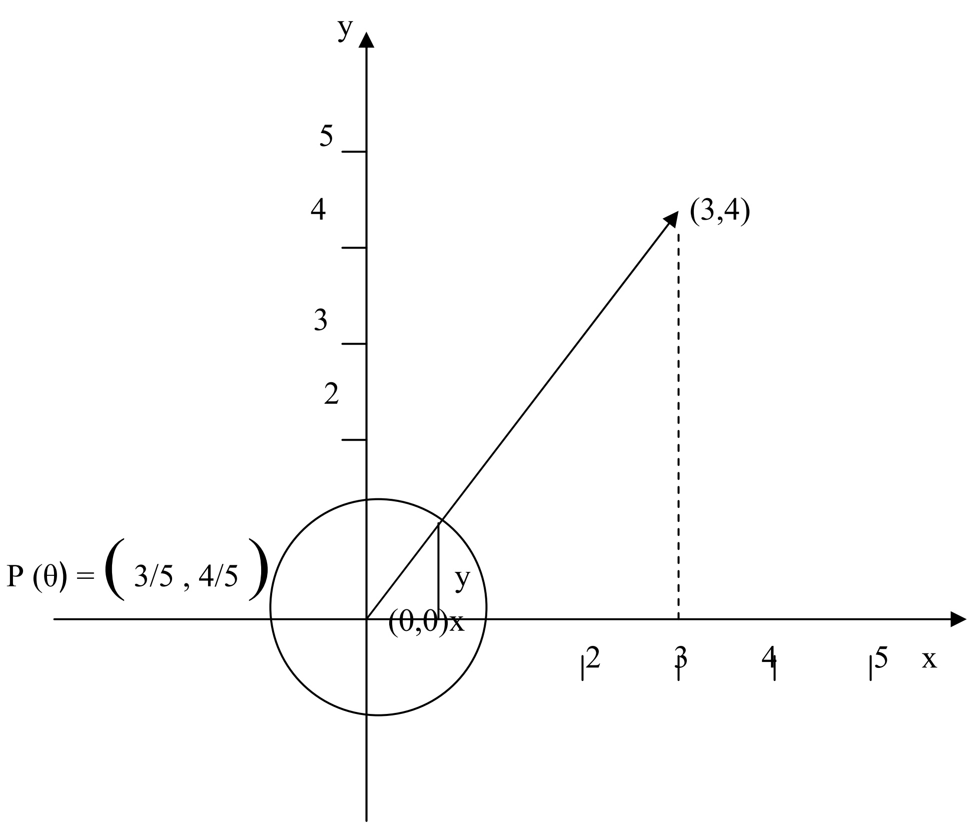
$$P\left(5\pi/4\right) = \left(-\sqrt{2}/2\,,\ -\sqrt{2}/2\right)$$

Al usar la identidad trigonomètrica respectiva, se tiene:

$$\operatorname{tg} 5\pi/4 = \frac{\operatorname{sen} 5\pi/4}{\cos 5\pi/4} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1 \quad \text{por tanto} \quad \operatorname{tg} 5\pi/4 = 1$$

DADO EL VALOR DE UNA FUNCION, ENCONTRAR EL VALOR DE TODAS LAS DEMAS FUNCIONES

Si se conoce el valor de una de las funciones circulares y el cuadrante donde queda el punto terminal P(θ) , se puede determinar el valor de las de más funciones circulares. Ejemplo: Para un valor dado de θ el punto P (θ) queda localizado sobre el segmento de recta que une los puntos (0.0) y (3,4). Encontrar el valor de todas las funciones circulares de θ.



La distancia de (0,0) a (3 ,4) está dada por

$$\sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Por triángulos semejantes se determinan las coordenadas de x, y del punto P (θ) queda localizado sobre la circunferencia unitaria y sobre la recta que une los puntos (0,0) y (3,4).

$x / 1 = 3 / 5$; $x = 3 / 5$; $y / 1 = 4 / 5$; $y = 4 / 5$ se obtienen las coordenadas Del punto $P(\theta) = (3/5, 4/5)$ al utilizar la definición de las funciones circulares se tiene .

$\text{sen } \theta = y = 4/5$ $\qquad$ $\cot \theta = x / y = \dfrac{3/5}{4/5} = 3/4$

$\cos \theta = x = 3/5$ $\qquad$ $\sec \theta = 1 / x = 1 / 3/5 = 5/3$

Por ser triángulos congruentes el $P(\theta + \pi) = \left(-3/5, 4/5\right)$, los valores de las funciones son:

$\text{Sen } (\theta + \pi) = 4/5$ $\qquad$ $\cot (\theta + \pi) = -3/4$
$\text{Cos } (\theta + \pi) = -3/5$ $\qquad$ $\sec (\theta + \pi) = -5/3$
$\text{Tg } (\theta + \pi) = -4/3$ $\qquad$ $\csc (\theta + \pi) = 5/4$

Si a θ se le aumenta o disminuye un múltiplo entero de 2 π [θ + k (2 π)] coincide con el punto original P (θ), estos puntos tienen las mismas coordenadas y se obtiene la siguiente definición:
Para toda θ Є R y k Є 1 se tienen las cuatro funciones circulares periódicas en 2 π.

$\text{Sen } [\theta + k(2\pi)] = \text{sen } \theta$	$\text{sen } [\theta + k(2\pi)] = \sec \theta$
$\text{Cos } [\theta + k(2\pi)] = \cos \theta$	$\csc [\theta + k(2\pi)] = \csc \theta$

Las funciones circulares de tangente y cotangente difieren en el período en virtud de que la tg θ = y/x y la cot = x/y , en el punto P (θ) al aumentar P (θ + kπ) se da la siguiente definición:

Para toda θ € R y k Є 1 se tiene que

$\text{tg } (\theta + k\pi) = \text{tg } \theta$

$\text{Cot } (\theta + k\pi) = \cot \theta$

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACION
Encontrar el valor exacto de csc , cos y cot de $3\pi/2$ con su respectiva gráfica

Determinar el valor de las seis funciones circulares para el respectivo valor de θ

Resolver los problemas con el auxilio de la gráfica (5 , -4) y (-2 , 6) .

UNIDAD XIII
FUNCIONES CIRCULARES

Modulo 3
Gráfica de las funciones seno y coseno

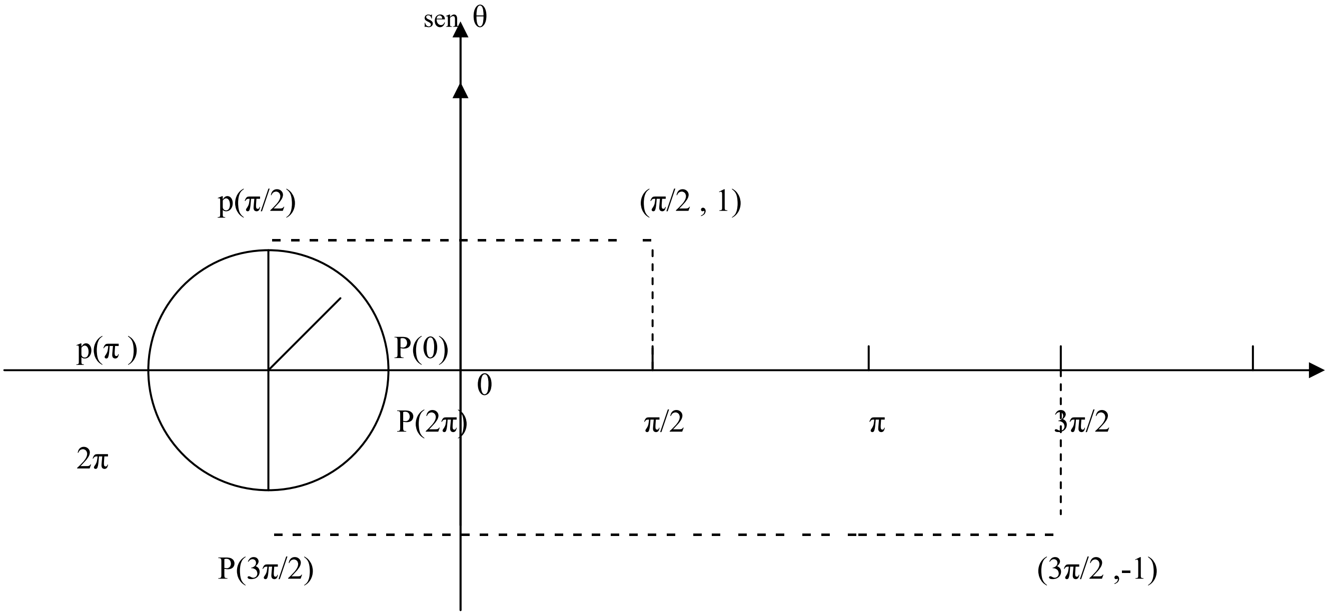
OBJETIVO
Describir e interpretar la tabla y gráficas de las funciones seno y coseno.

GRAFICA DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Cuadrante	Variación de θ	Variación de sen θ	Variación de cos θ
1	De 0 à $\pi/2$	De 0 à 1	De 1 à 0
11	De $\pi/2$ à π	De 1 à 0	De 0 à -1
111	De π à $3\pi/2$	De 0 à -1	De -1 à 0
1V	De $3\pi/2$ à 2π	De -1 à 0	De 0 à 1

Los valores de las funciones seno y coseno, varían entre -1 y 1 para todo $\theta \in$ R.
Construcción de la grafica $y = \text{sen } \theta$

En un sistema de coordenadas rectangulares, se marca sobre el eje x los valores de θ y sobre el eje y los valores de sen θ. A la izquierda del eje **y** se dibuja una circunferencia unitaria con su centro sobre el eje horizontal , la distancia del origen de los ejes a cada uno de estos puntos es igual a la longitud de su arco correspondiente en la circunferencia unitaria, se traza por cada uno de estos puntos rectas paralelas al eje horizontal y vertical.



Los puntos donde se intersectan las dos rectas paralelas a los ejes, son puntos que pertenecen a la curva y = sen θ , para un arco θ cualquiera sobre la circunferencia unitaria, se tiene el punto correspondiente (θ sen θ), al unir todos los puntos por medio de una línea curva se obtiene la gráfica .

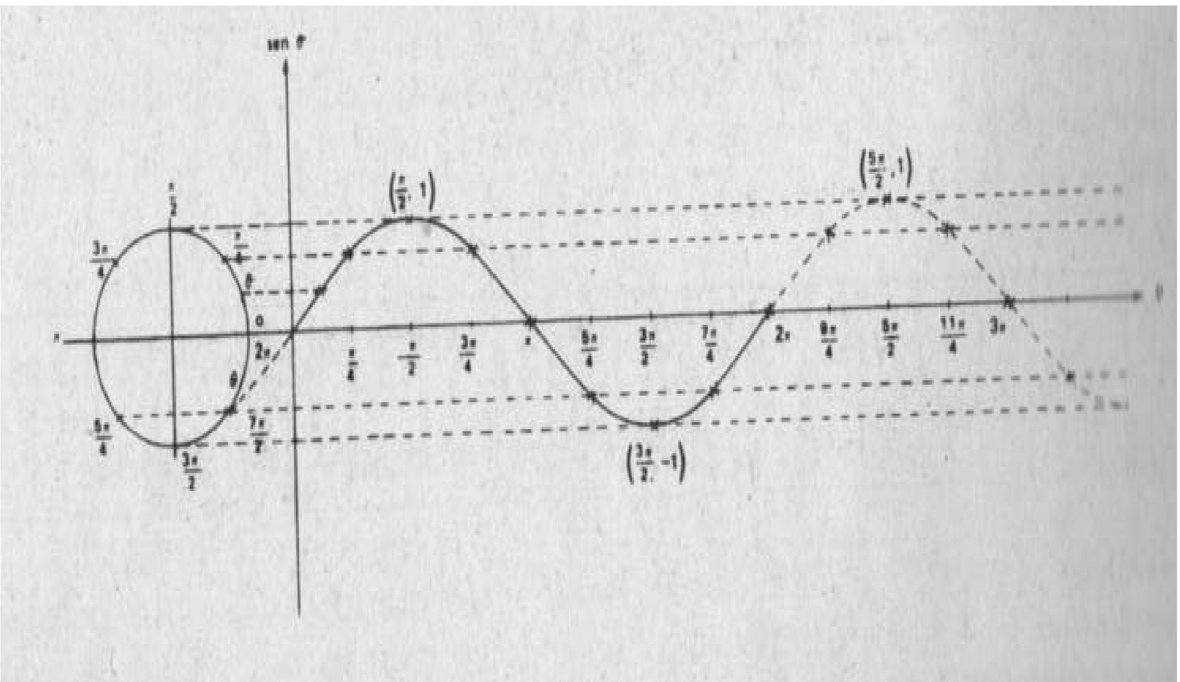


Figura 6

Propiedades de la función seno:

1) La función es periódica , con período igual a 2π.
2) En el primer cuadrante la función crece de 0 à 1 y en el curto cuadrante crece de -1 à 0 .

3) En el segundo y tercer cuadrante la función decrece de 1 à 0 y de 0 à -1.
4) La función es positiva en el primero y segundo cuadrante , y negativa en el tercero y. Cuarto cuadrante.

5) La función intersecta el eje horizontal en múltiplos enteros de π, sen $n\pi = 0$,

$n \in 1$.

FUNCION COSENO

X = cos θ En un sistema de coordenadas rectangulares se grafican los valores de θ (dominio) en el eje horizontal y los valores de cos θ (contradominio) en el eje vertical.

θ	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π
Cos θ	1	√3/2	1/√2	1/2	0	-1/2	-1/√2	-√3/2	-1	-√3/2	-1/√2	-1/2	0	1/2	1/√2	√3/2	1

GRAFICA DE LA FUNCION COSENO

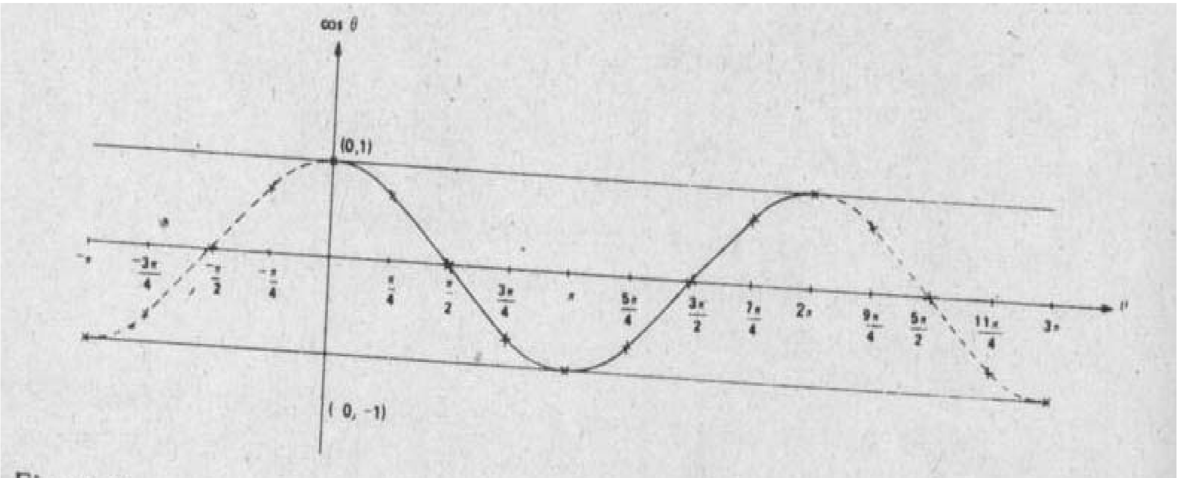


Figura 7

La curva se prolonga indefinidamente en ambos sentidos, y se visualizan las siguientes propiedades en la gráfica:

1. La función decrece entre 0 y π
2. La función crece entre π y 2π
3. La función es periódica , siendo su periodo igual a 2π
4. La función es positiva en los cuadrantes 1 y 1V, y negativa en 11 y 111
5. El valor del cos θ varía entre -1 y 1 para $\theta \in R$.

UNIDAD XIII
FUNCIONES CIRCULARES

Modulo 4
Identidades fundamentales

OBJETIVO
Distinguir entre ecuación e identidad, conocer y utilizar las Identidades.

4.1 IDENTIDADES FUNDAMENTALES.

Una igualdad condicional se cumple cuando se encuentra el valor de la variable de una ecuación y se le da el uso de cuantificador existencial.

Una identidad se cumple cuando se expresa un resultado en términos de factorización y se aplican las propiedades de sustitución, reflexiva, simétrica, transitiva, etc.
Las funciones circulares se verifican en base a las identidades fundamentales que a continuación se clasifican:

PITAGORICAS.	DE COCIENTES	DE RECIPROCAS
$\text{Sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha / \cos\alpha$	$\text{sen}\,\alpha \ \csc\alpha = 1$
$\text{Tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$	$\cot\alpha = \cos\alpha / \text{sen}\,\alpha$	$\cot\alpha \ \sec\alpha = 1$
$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$		$\text{tg}\,\alpha \ \cot\alpha = 1$

FORMULACION DE IDENTIDADES PITAGORICAS

Cada $\alpha \in R$ corresponde un punto en la circunferencia unitaria y las coordenadas de cualquier punto hacen cierta la igualdad:

$x^2 + y^2 = 1$

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Se divide la igualdad por $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \qquad a + b / c = a / c + b / c$$

$$\left(\text{sen }\alpha / \cos\alpha\right)^2 + \left(\cos\alpha / \cos\alpha\right)^2 = \left(1 / \cos\alpha\right)^2$$

$$\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a/b)}$$

ò $(\text{tg}\,\alpha)^2 + 1 = (\sec\alpha)^2$ propiedad de sustitución.

Al dividir los dos miembros por $\text{sen}^2\alpha$ se obtiene:

$$\text{Sen}^2\alpha / \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha / \text{sen}^2\alpha = 1 / \text{sen}^2\alpha$$

$$(\text{sen}\alpha / \text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha / \text{sen}\alpha)^2 = (1 / \text{sen}\,\alpha)^2 \qquad \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a/b)}$$

Las seis funciones circulares de α en términos de $\cos\alpha$.

$$\text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\text{Tg}\,\alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$$

$$\sec\alpha = 1 / \cos\alpha$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$$

Funciones circulares de α en términos de $\sec\alpha$

$$\text{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha}$$

$$\cos\alpha = 1 / \sec\alpha$$

$Tg\alpha = \pm \sqrt{sec^2 \alpha - 1}$

$cot\alpha = \pm \dfrac{1}{\sqrt{sec^2 \alpha - 1}}$

$sec\alpha = sec\alpha$

$csc\alpha = \pm \dfrac{ces\alpha}{\sqrt{sec^2 \alpha - 1}}$

PROCEDIMIENTO PARA VERIFICACION DE IDENTIDADES.
1.- Reducir el miembro màs complicado al màs simple.
2.- Trabajar con ambos miembros simultáneamente hasta llegar en ambos la misma expresión.
3.- Usar algún artificio como multiplicar (dividir) ambos miembros en una fracción por la misma expresión.

Ejemplo:
Verificar la identidad, transformar el primer miembro de la misma hasta hacerlo igual al segundo.

$$\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}$$

(1) $\dfrac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} \cdot \dfrac{sen\alpha}{sen\alpha}$ (1) $a / b = a / b \ . \ c / c$

(2) $= \dfrac{(1-\cos\alpha)\ sen\alpha}{sen^2 \alpha}$ (2) $a / b \ . \ c / d = \dfrac{a \ . \ c}{b \ . \ d}$

(3) $= \dfrac{(1-\cos\alpha)\ sen\alpha}{1-\cos^2 \alpha}$ (3) sustituciòn

(4) $$= \frac{(1-\cos\alpha)\ \text{sen}\alpha}{(1-\cos\alpha)\ (1+\cos\alpha)}$$ (4) $a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b)$

(5) $$= \frac{\text{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}$$ (5) $ac / bc = a / b$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Expresar las siguientes funciones en términos de sen α

1.- $\sec\alpha$

2.- $\cos^2 \alpha$

3.- Verificar la siguiente identidad.

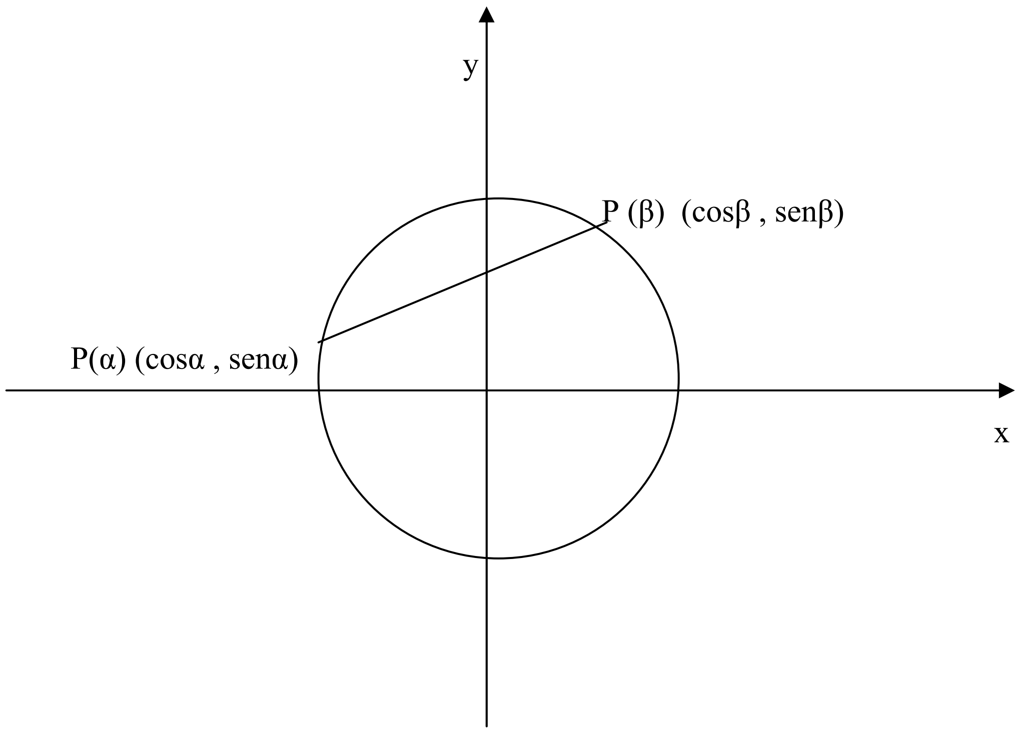
$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \frac{\sec\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

UNIDAD XIV
FUNCIONES CIRCULARES DE SUMA
Y DIFERENCIA DE NUMEROS REALES

Modulo 5
Coseno de la diferencia de dos números

OBJETIVO
Deducir las funciones circulares e identificar las cofunciones como una expresión de la diferencias de dos números reales

5.1 COSENO DE LA DIFERENCIA DE DOS NÙMEROS
Observación de los arcos P(α) y (β).
P(α), punto terminal de un arco de longitud α, P(β) punto terminal de un arco de longitud β , el arco determinado por los puntos P(α) y P(β) , tiene magnitud α –β ,segmento de recta que une estos dos puntos en una cuerda de la circunferencia.



La longitud de la cuerda, es la distancia entre dos puntos extremos, en el plano esta dada por la expresión.

$$L = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2}$$

Se eleva al cuadrado cada binomio dentro del radical

$$L = \sqrt{(\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta) + (\operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta)}$$

Se agrupan términos

$$L = \sqrt{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

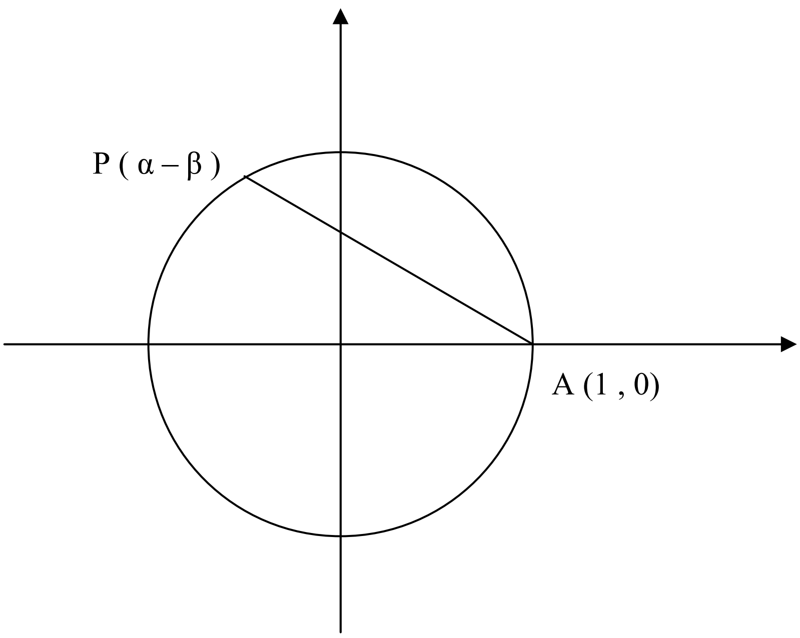
Para todo (gamma) $\gamma \in R$ $\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma = 1$ resulta:

$$L = \sqrt{1 + 1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Se suma y se saca factor comùn a -- 2

$$L = \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)}$$

Se considera una cuerda de la misma longitud L que coincida con el punto A (1 , 0)



MEDIDA DEL ARCO DETERMINADO POR UNA CUERDA

El arco determinado por la cuerda mide (α -- β) unidades, a un mismo circulo a curdas iguales corresponden arcos iguales y viceversa:
Los extremos de la cuerda de la figura anterior son los puntos A (1 ,0) y (α -- β) se forman las coordenadas (cos (α -- β) , sen (α -- β). Al establecer la distancia entre sus puntos extremos se asigna el subíndice 2 a las coordenadas del punto terminal P (α -- β) y el subíndice 1 a las coordenadas del punto A.

$$L = \sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - 0]^2}$$

Se eleva al cuadrado dentro del radical

$$L = \sqrt{\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)}$$

Se agrupan términos

$$L = \sqrt{[\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)}$$

$\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) = 1$ entonces:

$$L = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}$$

Se derivan dos expresiones (1) y (2) para representar un mismo número L.

$$\sqrt{2 - 2(\cos\alpha\ \cos\beta) + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta)} = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad para eliminar radicales

$$2 - 2(\cos\alpha\ \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

Cancelación de la suma

$$-2(\cos\alpha\ \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta) = -2\cos(\alpha - \beta)$$

Se multiplican ambos miembros de la igualdad por el reciproco de -- 2 = -- 1 / 2 y por la propiedad simétrica resulta EL COSENO DE LA DIFERENCIA DE DOS ARCOS.

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\ \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta}$$

Ejemplo: Si $\alpha = \pi / 2$ $\beta = -5$

$$\cos\left[\pi / 2 - (-5)\right] = \cos \pi / 2 \ \cos(-5) + \operatorname{sen} \pi / 2 \ \operatorname{sen}(-5)$$

Ejemplo : Desarrollo de $\cos\left(5\pi / 2 - \pi / 6\right)$ Sustituir los valores exactos de las funciones obtenidas.

Solución:

$$\cos\left(5\pi/ 4 - \pi / 6\right) = \cos 5\pi / 4 \ \cos \pi / 6 + \operatorname{sen} 5\pi / 4 \ \operatorname{sen} \pi / 6$$

$$= -1 / \sqrt{2} \ , \ \sqrt{3} / 2 \quad + \left(-1 / \sqrt{2}\right) 1 / 2$$
$$= -\sqrt{3} / 2\sqrt{2} - 1 / 2\sqrt{2}$$

$$\cos\left(5\pi / 4 - \pi / 6\right) = -\sqrt{3} + 1 / 2\sqrt{2}$$

Se obtiene la mitad de los productos cruzados dividido entre 2

$5\pi / 4 - \pi / 6 \quad = 15\pi - 2\pi / 12 = 13\pi / 12$

$\cos 5\pi / 4 - \pi / 6 \quad = \cos 13 \pi / 12$

Por propiedad simétrica de igualdades

$\cos 13 \pi / 12 \quad = -\sqrt{3} + 1 / 2\sqrt{2}$

COFUNCIONES

Se antepone el prefijo " co " al nombre se las funciones elementales como se menciona :

seno , co seno	tangente , co tangente	secante , co secante

Existe una propiedad que relaciona las cofunciones para expresar cualquier función circular de un número real en términos de una función de un número real α tal que
$0 \leq \alpha \leq \pi/4$.

Se pare de la expresión:

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

Si la expresión es valida para todo valor permisible de α y β lo es cuando $\alpha = \pi/2$
Entonces :

$$\cos\left(\pi/2 - \beta\right) = \cos \pi/2 \cos\beta + \operatorname{sen}\pi/2 \operatorname{sen}\beta$$

$\cos \pi/2 = 0$ y $\operatorname{sen}\pi/2 = 1$

$$\cos\left(\pi/2 - \beta\right) = 0 \cdot \cos\beta + 1 \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\left(\pi/2 - \beta\right) = \operatorname{sen}\beta$$

Siendo esta igualdad una identidad , se cumple para todo $\beta \in R$.

Como $\left(\pi/2 - \beta\right) \in R$. Al sustituir β por $\pi/2 - \beta$ se obtiene:

$\cos\left[\pi/2 - \left(\pi/2 - \beta\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\pi/2 - \beta\right)$ propiedad de cofunciones
Al multiplicar el primer miembro

$\cos\left(\pi/2 - \pi/2 + \beta\right) = \operatorname{sen}\left(\pi/2 - \beta\right)$ $-b\left(a - b\right) = -a + b$

$$\text{Cos } \beta = \text{sen}\left(\pi / 2 - \beta\right)$$

Se consideran las igualdades (1) (2)

(1) $\text{sen } \beta \,.\cos \left(\pi / 2 - \beta\right)$ (2) $\cos \beta - \text{sen } \left(\pi / 2 - \beta\right)$

Se divide (2) entre (1) Se divide (1) entre (2)

$$\frac{\cos \beta}{\text{sen } \beta} \equiv \frac{\text{sen}\left(\pi / 2 - \beta\right)}{\cos\left(\pi / 2 - \beta\right)} \quad , \quad \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \beta} \equiv \frac{\cos\left(\pi / 2 - \beta\right)}{\text{sen}\left(\pi / 2 - \beta\right)} \quad , \quad \text{sen } \beta \neq 0$$

Resilta:

(3) $\cot \beta \equiv \text{tg } (\pi / 2 - \beta)$, (4) $\text{tg } \beta \equiv \cot (\pi / 2 - \beta)$

Si dos números reales distintos de cero son iguales, entonces sus recíprocos también lo son.

(5) $\csc \beta \equiv \sec \left(\pi / 2 - \beta\right)$ y (6) $\sec \beta \equiv \csc \left(\pi / 2 - \beta\right)$

De las igualdades (1) a (6) se concluye que:
Una función circular de un número real β es igual a su cofunciòn de π / 2 menos el número β.

5. 2 .1 FUNCIONES DE (--β) EN TERMINOS DE β

Expresión para sen (-- β) en términos de β

$\text{sen } (- \beta) \equiv \cos \left[\pi / 2 - (- \beta)\right]$ propiedad de cofunciones

$\text{sen } (- \beta) \equiv \cos \left(\pi / 2 + \beta \right)$ $-(- a) = a$

$$\text{sen}\ (-\beta) \equiv \cos\left(\beta + \pi/2\right)$$ postulado conmutativo de la suma

$$\text{sen}\ (-\beta) \equiv \cos\left[\beta - \left(-\pi/2\right)\right] \qquad a = -(-a)$$

$$\text{sen}\ (-\beta) \equiv \cos\beta\ \cos\left(-\pi/2\right) + \text{sen}\beta\ \text{sen}\left(-\pi/2\right)$$

$$\cos\ (\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\ \cos\beta + \text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta$$

Como $\cos\left(-\pi/2\right) = 0$ y $\text{sen}\left(-\pi/2\right) = -1$ al sustituir

$$\text{sen}\ (-\beta) \equiv \cos\beta \cdot 0 + \text{sen}\,\beta \cdot (-1)$$

$$\boxed{\text{sen}\ (-\beta) \equiv 0 - \text{sen}\,\beta}$$

Las expresiones del resto de las funciones de (-- β) en terminaos de β son:

$$\text{Tg}\ (-\beta) \equiv \frac{\text{sen}\ (-\beta)}{\cos\ (-\beta)}$$

$$\text{Tg}\ (-\beta) \equiv \frac{-\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}$$

$$\boxed{\text{Tg}\ (-\beta) \equiv -\text{tg}\,\beta}$$

$$\cot\ (-\beta) \equiv \frac{1}{\text{Tg}\ (-\beta)} \equiv \frac{1}{-\text{tg}\,\beta} \equiv -\cot\beta$$

$$\boxed{\cot\ (-\beta) \equiv -\cot\beta}$$

$$\sec\ (-\beta) \equiv \frac{1}{\cos\ (-\beta)} \equiv \frac{1}{\cos\beta} \equiv \sec\beta$$

$$\boxed{\text{Sec}\ (-\beta) \equiv \sec\beta}$$

$$\csc(-\beta) \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}(-\beta)} \equiv \frac{1}{-\operatorname{sen}\beta} \equiv -\csc\beta$$

$$\boxed{\csc(-\beta) \equiv -\csc\beta}$$

Ejemplo:
Representaciòn de las funciones de $(-\beta)$ en términos de β, expresar sen $(3\pi/2 - \beta)$ como una función de β

Solución: $\operatorname{sen}\left(3\pi/2 - \beta\right) \equiv \operatorname{sen}\left(\pi/2 + \pi - \beta\right)$ $\qquad 3\pi/2 = \pi/2 + \pi$

$\equiv \operatorname{sen}\left[\pi/2 + (\pi - \beta)\right]$ $\qquad$ agrupar $\pi - \beta$

$\equiv \operatorname{sen}\left[\pi/2 - \langle -(\pi - \beta)\rangle\right]$, $\qquad \pi - \beta = -\left[-(\pi - \beta)\right]$

$\equiv \cos\langle -(\pi - \beta)\rangle$ $\qquad$ propiedad de cofunciones

$\equiv \cos(\pi - \beta)$ $\qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\equiv \cos\left(\pi/2 + \pi/2 - \beta\right)$ $\qquad \pi = \pi/2 + \pi/2$

$\equiv \cos\left[\pi/2 + \left(\pi/2 - \beta\right)\right]$ $\qquad$ agrupar $\pi/2 - \beta$

$\equiv \cos\left[\pi/2 - -\left(\pi/2 - \beta\right)\right]$, $\qquad \pi/2 - \beta = - -\left(\pi/2 - \beta\right)\rangle$

$\equiv \operatorname{sen} -\left(\pi/2 - \beta\right)$ $\qquad$ propiedad de cofunciones

$\equiv -\operatorname{sen}\left(\pi/2 - \beta\right)$ $\qquad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\equiv -\cos\beta$ $\qquad \cos\beta = \operatorname{sen}\left(\pi/2 - \beta\right)$

$\operatorname{sen}\left(3\pi/2 - \beta\right) \equiv -\cos\beta$ $\qquad$ transitiva de igualdades

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Tomar como base la expresión $\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$, desarrollar el coseno de la diferencia y determinar el valor al sustituir los valores exactos de las funciones que resulten.

$\cos\left(3\pi/4 - \pi/4\right)$

$\cos\left(\pi/2 - 3\pi/2\right)$

Expresar las siguientes funciones en términos de β

$\csc(\pi - \beta)$

$\operatorname{sen}(\alpha - \pi)$ NOTA $\alpha - \pi \equiv -(\pi - \alpha)$

Verificar las siguientes identidades

$\cos(2\pi - \alpha) \equiv \cos\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) \equiv -\cos\alpha$

UNIDAD XIV
FUNCIONES CIRCULARES DE SUMA
Y DIFERENCIA DE NUMEROS REALES

Modulo 6
Funciones circulares de la suma de números reales

OBJETIVO
Deducir las expresiones para el coseno, seno y tangente de la suma y diferencia de dos números reales y expresar funciones del tipo (α + β) ò (α -- β) en términos de funciones de otro número entre 0 y π / α con el uso de las fórmulas de reducción.

6.1 FUNCIONES CIRCULARES DE LA SUMA DE NÚMEROS REALES.
Son consecuencia de la igualdad cos (α -- β) ≡ cos α cos β + sen α sen β.
Coseno de una suma.

$\cos\ (\alpha + \beta) \equiv \cos\ [\alpha - (-\beta)]$ $\qquad \beta \equiv -(-\beta)$
$\equiv \cos\alpha\ \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}(-\beta)$ $\qquad$ desarrollo de cos (α -- β)
$\equiv \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\,(-\operatorname{sen}\beta)$ $\qquad \cos(-\beta) \equiv \cos\beta,\ \operatorname{sen}(-\beta) \equiv -\operatorname{sen}\beta$
$\equiv \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$ $\qquad a\,(-b) \equiv -(ab)$

$\boxed{\cos\ (\alpha + \beta) \equiv \cos\alpha\ \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta}$ propiedad transitiva de las igualdades

Expresión para el seno de la suma y diferencia de números reales, resulta de la función coseno , del concepto de cofunciòn y de las funciones de (-- β) en términos de β

$\operatorname{Sen}\ (\alpha - \beta) \equiv \cos\ \left[\pi / 2 - (\alpha - \beta)\right]$ $\qquad$ propiedad de cofunciones

$\equiv \cos\ \left[\pi / 2 - \alpha + \beta\right]$ $\qquad -(a - b) \equiv -a + b$

$\equiv \cos\ \left[\left(\pi / 2 - \alpha\right) + \beta\right]$ $\qquad$ agrupaciones

$\equiv \cos\left(\pi / 2 - \alpha\right) \cos\beta - \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) \operatorname{sen}\beta$ $\qquad$ desarrollo de cos (α--β)

$\equiv \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta$ $\qquad$ sustitución

$\operatorname{sen}\ (\alpha - \beta) \equiv \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta$ $\qquad$ propiedad transitiva de igualdades

$\text{sen}\ (\alpha + \beta) \equiv \text{sen}\ [\alpha - (-\beta)]$

$\text{sen}\ (\alpha + \beta) \equiv \text{sen}\alpha\ \cos(-\beta) - \cos\alpha\ \text{sen}(-\beta)$

como : $\cos(-\beta) \equiv \cos\beta$, $\text{sen}(-\beta) \equiv -\text{sen}\ \beta$ al sustituir

$\text{sen}\ (\alpha + \beta) \equiv \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha\ (-\text{sen}\beta)$

$$\boxed{\text{sen}\ (\alpha + \beta) \equiv \text{sen}\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\beta}$$

Deducción de la expresión tangente de una suma y diferencia

$\text{Tg}\ (\alpha + \beta) \equiv \text{sen}(\alpha + \beta) / \cos(\alpha + \beta)$

$$\equiv \frac{\text{sen}\ \alpha \cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\ \beta}{\cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta}$$

$$\equiv \frac{\dfrac{\text{sen}\ \alpha\ \cos\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\ \text{sen}\ \beta}{\cos\alpha\ \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\ \cos\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta} - \dfrac{\text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta}{\cos\alpha \cos\beta}}$$

se divide toda la expresión entre $(\cos\alpha\ \cos\beta)$

se hace el proceso de eliminación de $\cos\alpha\ \cos\beta\ / \cos\alpha\ \cos\beta = 1$

$$\equiv \frac{\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\beta} + \dfrac{\text{sen}\ \beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\text{sen}\ \beta}{\cos\beta}}$$

$$\boxed{\text{tg}\ (\alpha + \beta) \equiv \frac{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta}{1 - \text{tg}\ \alpha\ \text{tg}\ \beta}}$$

Ejemplo: Encontrar el valor exacto de: $\cos \pi / 12$

Sustituir $\pi / 12$ por $11\pi / 6 -- 7\pi / 4$

Solución: $\cos \pi / 12 = \cos \left(11 \pi / 6 -- 7\pi / 4\right)$

$= \cos 11\pi / 6 \ \cos 7\pi / 4 + \operatorname{sen} 11\pi / 6 \ \operatorname{sen} 7\pi / 4$

$= \sqrt{3} / 2 \quad \sqrt{2} / 2 + \left(-1 / 2\right) \left(- \sqrt{2} / 2\right)$

$= \sqrt{6} / 4 + \sqrt{2} / 4$

$\cos \pi / 12 = \sqrt{6} + \sqrt{2} / 4$

Encontrar el valor exacto de : $\sec \beta = 5 / 16$

El inverso de $\sec \beta = 26 / 10$ es $\cos \beta = 10 / 26$

A sustituir $\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta = 1$ se tiene

$100 / 676 + \operatorname{sen}^2 \beta = 1$

$\operatorname{sen}^2 \beta = 1 - 100 / 676$

$\operatorname{sen}^2 \beta = 676 - 100 / 676$

$\operatorname{sen}^2 \beta = 576 / 676$

$\operatorname{sen} \beta = 24 / 26$ ò $\operatorname{sen} \beta = - 24 / 26$

$3\pi / 2 \leq \beta \leq 2\pi$ el $P (\beta)$ esta en el cuarto cuadrante y es negativo

Expresar las siguientes proposiciones en términos de una función circular de θ

$\cos \left(\pi / 6 + \theta\right)$

Solución:

$\cos \left(\pi / 6 + \theta\right) = \cos \pi / 6 \ \cos \theta - \operatorname{sen} \pi / 6 \ \operatorname{sen} \theta$

$= \sqrt{3} / 2 \quad \text{ccos } \theta -- 1/ 2 \ \operatorname{sen} \theta$

$$\cot \left(3\pi / 6 -- \theta\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(3\pi / 4 -- \theta\right)} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{tg} 3\pi / 4 -- \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} 3\pi / 4 \ \operatorname{tg} \theta}} = \frac{1 + \operatorname{tg} 3\pi / 4 \ \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} 3\pi / 4 -- \operatorname{tg} \theta}$$

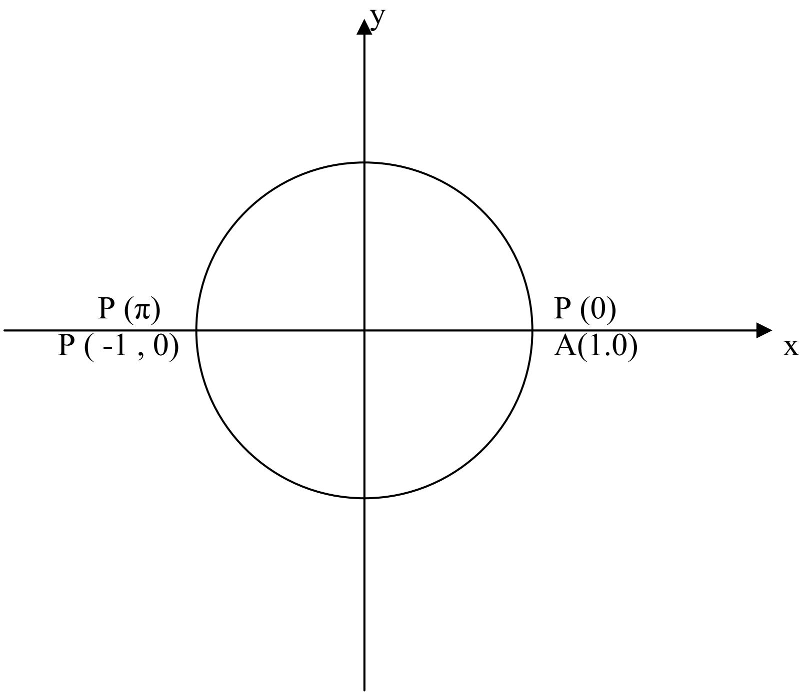
$$= \frac{1 + (-1)\ \text{tg}\ \theta}{-1 - \text{tg}\ \theta} = \frac{1 - \text{tg}\ \theta}{-1 - \text{tg}\ \theta} = \boxed{\frac{\text{tg}\ \theta - 1}{\text{tg}\ \theta + 1}}$$

6. 2 FORMULAS DE REDUCCION

Son funciones circulares de un número real en términos de un número entre 0 y π / 2, si K Є I entonces:

$\text{sen}\ 2k\ \pi / 2 = 0$ y $\cos\ 2k\ \pi / 2 = (-1)^k$

Siendo k un numero entero , el punto terminal P (Kπ) del arco kπ es el punto A (1,0) ò el punto B (-1,0)



El punto terminal del arco **kπ** es el punto A(1,0) cuando **k** es un número par ò cero **(P(0) , P(2π) , P(- 4π) , P(-10π).**

Coincide eon el punto **B (- 1.0**

si **k** es un número impar **(P(π) , P(3π) , P(- 5π)**
P (- 11π) , P (- π) , sen kπ = **0** , **k** Є 1 , cos **(k π)** = $(-1)^k$ si **k** es par coincide con

A) $(-1)^K = 1$ el punto terminal coincide con **B)** $(-1)^K = -1$, si **K**π = 2k π / 2 entonces **$\mathrm{sen}\ 2k\pi/2 = 0$** y **$\cos\ 2k\pi/2 = (-1)^k$**, $k \in I$

Si β es un número entre entre 0 y $\pi/2$ $(0 < \beta < \pi/2)$ entonces

$$\mathrm{sen}\ [2k\pi/2 + \beta] \equiv \mathrm{sen}\ 2k\pi/2\ \cos\beta + \cos 2k\pi/2\ \mathrm{sen}\ \beta$$
$$\equiv 0 \ .\ \cos\beta + (-1)^k\ \mathrm{sen}\ \beta$$

$$\boxed{\mathrm{sen}\ [2k\pi/2 + \beta] \equiv (-1)^k\ \mathrm{sen}\ \beta} \quad \text{y} \quad \boxed{\cos\ [2k\pi/2 + \beta] \equiv (-1)^k\ \cos\beta}$$

Las dos expresiones son utilizadas cuando el numeró puede representarse como la suma de un múltiplo par de $\pi/2 + \beta$.

Expresión de un número como la suma de múltiplo impar de

$\pi/2\left(\left[(2k+1)\ \pi/2\right]\right)$ y β

$$\mathrm{sen}\left[(2k+1)\ \pi/2 + \beta\right] \equiv \mathrm{sen}\left[2k\pi/2 + \pi/2 + \beta\right] \quad \text{distributiva de la suma}$$

$$\equiv \mathrm{sen}\left[\pi/2 + 2k\pi/2 + \beta\right] \quad \text{conmutativa}$$

$$\equiv \mathrm{sen}\left[\pi/2 + \left(2k\pi/2 + \beta\right)\right] \quad \text{agrupaciòn}$$

$$\equiv \mathrm{sen}\ \pi/2\ \cos\left(2k\pi/2 + \beta\right) + \cos\pi/12\ \mathrm{sen}\left(2k\ \pi/2 + \beta\right)$$

desarrollo del seno de una suma

$$\equiv 1\ .\ \cos\left(2k\pi/2 + \beta\right) + 0\ .\ \mathrm{sen}\left(2k\pi/2 + \beta\right)$$

$$\equiv \cos\left(2k\pi/2 + \beta\right)$$

$$\equiv \boxed{(-1)^k\ \cos\beta}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}[(2k+1)\pi/2+\beta] \equiv (-1)^{k} \cos\beta} \quad y \quad \boxed{\cos[(2k+1)\pi/2+\beta] \equiv (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\beta}$$

Ejemplo:
Expresar **cos 21.6973** como una función de un número positivo menor que $\pi / 4$.
Solución: Representar los valores de $\boldsymbol{\pi}$ entero y fraccionado entre 2 y 4.

$\pi = 3.1416$, $\pi / 2 = 1.5708$, $\pi / 4 = 0.7854$

$21.6973 = 13\ (1.5708) + 1.2769$
El coeficiente de $\pi / 2$ es 13, número impar por lo que se aplica la expresión .

$$\cos 21.6973 = \cos\left[13\,\pi/2 + 1.2769\right]$$

$$= (-1)^{K+1} \operatorname{sen} 1.2769$$

$$= (-1)^{7} \operatorname{sen} 1.2769$$

$$= -\operatorname{sen} 1.2769$$

$$= -\cos\left[\pi/2 - 1.2769\right]$$

$$= -\cos(1.5708 - 1.2769)$$

$$\cos 21.6937 = -\cos .2939$$

Expresar **cot 7.3284** como una función de un número positivo menor de

$$\cot 7.3284 = \frac{\cos 7.3284}{\operatorname{sen} 7.3284} = \frac{\cos\left[4\pi/2 + 1.0452\right]}{\operatorname{sen}\left[4\pi/2 + 1.0452\right]} = \frac{(-1)^2 \cos 1.0452}{(-1)^2 \operatorname{sen} 1.0452}$$

$$= \cot 1.0452 = \operatorname{tg}\left(\pi/2 - 1.0452\right)$$

$$\cot 7.3284 = \operatorname{tg} 0.5256$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Encuentre el valor exacto de seno, coseno y tangente de $5\pi / 12$ haciendo $\alpha = 2\pi / 3$,
$\beta = \pi / 4$

2.- Determine en que cuadrante se localizan los puntos $P(\alpha + \beta)$ y $P(\alpha - \beta)$ del siguiente problema:

Si **$\cos \alpha = -12/13$ y $\cot \beta = 40/9$, $P(\alpha)$** no esta en el tercer cuadrante y $0 \le \beta \le \pi / 2$, encontrar el valor numérico de :

a) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\text{tg}(\alpha + \beta)$ c) $\cos(\alpha - \beta)$

d) $\cos(\alpha + \beta)$ e) $\text{sen}(\alpha - \beta)$ f) $\text{tg}(\alpha - \beta)$

3.-Escribe las siguientes expresiones en términos de θ

$\text{sen}\left(-\pi/4 + \theta\right)$ $\text{tg}\left(2\pi/3 - \theta\right)$

4.-Expresa las siguientes funciones en términos de funciones de un número real **α** tal que $0 < \alpha < \pi/4$, $\pi/4 = 0.7854$

$\cos 5.5676$, $\text{tg } 5.1212$, $\cot 8.2532$, $\cos 19.1427$

UNIDAD XIV
FUNCIONES CIRCULARES DE SUMA
Y DIFERENCIA DE NUMEROS REALES

Modulo 7
Funciones circulares del doble y la mitad de un número

OBJETIVO
Deducir las expresiones para el seno, coseno y tangente del doble y la Mitad de un número

7.1-. FUNCIONES CIRCULARES DEL DOBLE DE UN NUMERO.

Consiste en derivar y dar a conocer las funciones más usuales en términos de funciones de un número **α** un número real, **2α** es el doble del número **α** y las expresiones son : **sen2α , cos2α y tg2α** en términos de funciones se tiene:

$$\mathbf{sen\ 2\alpha \equiv sen\ (\alpha + \alpha) \equiv sen\alpha\ cos\alpha + cos\alpha\ sen\alpha \equiv sen\alpha\ cos\alpha + sen\alpha\ cos\alpha}$$

$$\mathbf{cos\ 2\alpha \equiv cos\ (\alpha + \alpha) \equiv cos\alpha\ cos\alpha - sen\alpha\ cos\alpha \equiv cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

$$\boxed{\mathbf{sen\ 2\alpha \equiv 2\ sen\alpha\ \ cos\alpha}} \qquad \boxed{\mathbf{cos\ 2\alpha \equiv cos^2\alpha - sen^2\alpha}}$$

Si $\mathbf{cos\ 2\alpha \equiv cos^2\alpha - sen^2\alpha}$ **y** $\mathbf{sen^2\alpha \equiv 1 - cos^2\alpha}$

Al sustituir se tiene:

$$\cos 2\alpha \equiv \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \equiv \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha \qquad , \qquad \cos 2\alpha \equiv (1 - \operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}^2\alpha \equiv 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\boxed{\mathbf{cos2\alpha \equiv 2\ cos^2\alpha - 1}} \qquad \boxed{\mathbf{cos2\alpha \equiv 1 - 2\ sen^2\alpha}}$$

$$\boxed{\mathbf{cos2\alpha \equiv cos^2\alpha - sen^2\alpha}}$$

La tangente de 2α es:

$$Tg2\alpha \equiv tg(\alpha + \alpha) \equiv \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\ tg\alpha} \equiv \frac{2\ tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \equiv \boxed{\frac{2\ tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}}$$

7.2 FUNCIONES CIRCULARES DE LA MITAD DE UN NUMERO EN TERMINOS DEL NUMERO

$$\cos 2\beta \equiv 1 - 2\ srn^2 \beta$$

Si se hace que $2\beta \equiv \alpha$ al despejar $\beta \equiv \alpha / 2$ al sustituir en la igualdad se tiene.

$$\cos\alpha \equiv 1 - 2\ sen^2\ \alpha / 2$$

$$2\ sen^2\ \alpha / 2 \equiv 1 - \cos\alpha$$

$$sen\ \alpha / 2 \equiv \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

Obtenciòn del seno y el coseno de $\alpha / 2$.

$$\boxed{sen\ \alpha / 2 \equiv \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}} \quad \text{ò} \quad \boxed{sen\ \alpha \equiv \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\cos\ \alpha / 2 \equiv \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}} \quad \text{ò} \quad \boxed{\cos\alpha \equiv \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}}$$

Para la $tg\ \alpha / 2$ existen dos expresiones que se obtienen al usar las identidades

$2\ sen^{\mathbf{2}}\ \alpha / 2 \equiv 1 - \cos\alpha$ y $2\ \cos^{\mathbf{2}}\ \alpha / 2 \equiv 1 + \cos\alpha$

Si en la igualdad

$$tg\ \alpha / 2 \equiv \frac{sen\ \alpha / 2}{\cos \alpha / 2}$$

al multiplicar ambos miembros por **2 sen α / 2**

$$\operatorname{tg} \alpha/2 \equiv \frac{\operatorname{sen} \alpha/2}{\cos \alpha/2} \cdot \frac{2 \operatorname{sen} \alpha/2}{2 \operatorname{sen} \alpha/2} \equiv \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha/2}{2 \operatorname{sen} \alpha/2 \cos \alpha/2}$$ al observar

$\mathbf{2 \operatorname{sen}^2 \alpha/2 \equiv 1 - \cos \alpha}$ y $2 \operatorname{sen} \alpha/2 \cos \alpha/2 \equiv \operatorname{sen}\left(\alpha/2 + \alpha/2\right) \equiv \operatorname{sen} \alpha$

Al sustituir se tiene:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha/2 \equiv \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}} \quad \text{y} \quad \boxed{\operatorname{tg} \alpha/2 \equiv \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Si $\cos \alpha = -3/5$ y $P(\alpha)$ está en el tercer cuadrante encontrar el valor exacto de las siguientes funciones .

a) $\operatorname{sen} 2\alpha$ b) $\operatorname{tg} 2\alpha$ c) $\cos \alpha/2$

d) $\cos 2\alpha$ e) $\operatorname{sen} \alpha/2$ f) $\operatorname{tg} \alpha/2$

Verificar las siguientes identidades.

2.- $\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos 2\alpha \equiv 1$

3.- $$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \equiv \cos 2\alpha$$

4.- $$\frac{\operatorname{sen} 4\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} \equiv 2 \cos 2\alpha$$

5.- $$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{2 \operatorname{tg} \beta} \equiv \cos 2\beta$$

UNIDAD XIV
FUNCIONES CIRCULARES DE SUMA
Y DIFERENCIA DE NUMEROS REALES

Modulo 8
Transformación de productos a sumas

OBJETIVO
Expresará el producto de dos funciones circulares como una suma o diferencia de funciones y aplicará las transformaciones.

8.1 TRANSFORMACIONES DE PRODUCTOS A SUMAS Y VICEVERSA.

Se consideran las expresiones para el seno de la suma y el seno de la diferencia.

$\text{sen}\ (\alpha + \beta) \equiv \text{sen}\ \alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\ \beta$

$\text{sen}\ (\alpha - \beta) \equiv \text{sen}\ \alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \text{sen}\ \beta$

Al sumar miembro a miembro las dos igualdades se tiene:

$$\boxed{\text{sen}\ \alpha\ \cos\beta = 1/2\left[\text{sen}\ (\alpha + \beta) + \text{sen}\ (\alpha - \beta)\right]}$$

Producto en términos de resta.

$\text{sen}\ (\alpha + \beta) \equiv \text{sen}\ \alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}$
$-$
$\text{sen}\ (\alpha - \beta) \equiv -\ \text{sen}\ \alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \text{sen}\ \beta$

$\text{sen}\ (\alpha + \beta) - \text{sen}\ (\alpha - \beta) \equiv 2\cos\alpha\ \text{sen}\ \beta$

Se consideran las expresiones para el coseno de la suma y el coseno de la diferencia.
$\cos\ (\alpha + \beta) \equiv \cos\alpha\ \cos\beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$

$\cos\ (\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\ \cos\beta + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$

En lugar de sumar se resta **cos (α - β)** se tiene

$\cos\ (\alpha + \beta) \equiv \cos\alpha\ \cos\beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$
$-$
$\cos\ (\alpha - \beta) \equiv -\cos\alpha\ \cos\beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$

$\cos\ (\alpha + \beta) - \cos\ (\alpha - \beta) \equiv -2\ \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$

Al multiplicar ambos miembros de la igualdad por -1 / 2 y se plica la propiedad simétrica se obtiene:

$$\operatorname{sen}\ \alpha\ \operatorname{sen}\beta \equiv -1/2\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$

o

$$\operatorname{sen}\ \alpha\ \operatorname{sen}\beta \equiv 1/2\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

Expresar los siguientes productos como una suma:

a) **sen 5 θ cos 3 θ**

Se utiliza la expresión

$$\operatorname{sen}\alpha\ \cos\ \beta \equiv 1/2\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

Se sustituye $\boldsymbol{\alpha}$ por $\mathbf{5\ \theta}$ y $\boldsymbol{\beta}$ por $\mathbf{3\ \theta}$

$$\mathbf{sen\ 5\theta\ cos\ 3\ \theta \equiv 1/2\left[sen\ (5\theta + 3\theta) + sen\ (5\theta - 3\theta)\right]}$$

$$\operatorname{sen}\ 5\theta\ \cos\ 3\ \theta \equiv 1/2\ (\operatorname{sen}\ 8\theta + \operatorname{sen} 2\theta)$$

b) **sen 2π / 3 sen π / 3**

Se utiliza la expresión

$$\operatorname{sen}\ \alpha\ \operatorname{sen}\ \beta = -1/2\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$\alpha = 2\pi / 3$ $\beta = \pi / 3$

$$\operatorname{sen}\ 2\pi/3\ \operatorname{sen}\pi/3 = -1/2\left[\cos\pi - \cos\ \pi/3\right]$$

o

$$\operatorname{sen}\ 2\pi/3\ \operatorname{sen}\pi/3 = 1/2\left[\cos\ \pi/3 - \cos\pi\right]$$

En la suma de funciones circulares como un producto se cambia la notación:

$$\boxed{\alpha = \frac{\theta + \omega}{2}} \qquad \boxed{\beta = \frac{\theta - \omega}{2}}$$

Los valores de α y β utilizados en las identidades

$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\omega = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta+\omega}{2}\cos\dfrac{\theta-\omega}{2}$
$\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\omega = 2\cos\dfrac{\Theta+\omega}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\theta-\omega}{2}$
$\cos\theta + \operatorname{sen}\omega = 2\cos\dfrac{\Theta+\omega}{2}\cos\dfrac{\theta-\omega}{2}$
$\cos\theta - \cos\omega = -2\operatorname{sen}\dfrac{\Theta+\omega}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\theta-\omega}{2}$

Ejemplo:

Expresar $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta + \operatorname{sen} 7\theta$

Solución: Se agrupan por pares los sumandos

$$(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 5\theta) + (\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 7\theta) = 2\operatorname{sen} 3\theta\cos(-2\theta) + 2\operatorname{sen} 5\theta\cos(-2\theta)$$

$$= 2\operatorname{sen} 3\theta\cos 2\theta + 2\operatorname{sen} 5\theta\cos 2\theta$$

$$= 2\cos 2\theta(\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta)$$

$$= 2\cos 2\theta . 2\operatorname{sen}\frac{3\theta+5\theta}{2} + \cos\frac{3\theta+5\theta}{2}$$

$$= 2\cos 2\theta . 2\operatorname{sen} 4\theta\cos(-\theta) .$$

$$= 2\cos 2\theta . 2\operatorname{sen} 4\theta\cos\theta$$

$$= 4\cos\theta . \cos 2\theta\operatorname{sen} 4\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta + \operatorname{sen} 7\theta = 4\cos\theta\cos 2\theta\operatorname{sen} 4\theta$$

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÒN

Expresar cada uno de los siguientes productos como una suma:

a) $\cos 5\theta \ \cos 7\theta$
b) $2 \operatorname{sen} 7\theta \operatorname{sen} 2\theta$
c) $3 \operatorname{sen} \theta \ \cos(-2\theta)$

Expresar cada de lasa siguientes sumas como un producto:

a) $\operatorname{sen} 8\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha$
b) $\cos 3\beta + \cos \beta$
c) $\cos 7\theta - \cos \theta$

Verificar las siguientes identidades

a) $$\frac{\operatorname{sen} 6\theta + \cos 3\theta}{\operatorname{sen} 6\theta + \operatorname{sen} 3\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

b) $$\frac{\cos 2\alpha + \cos 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 6\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} 4\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}$$

UNIDAD XV

FUNCION EXPONENCIAL Y FUNCION LOGARITMICA

Modulo 9

Funciones exponenciales y logarítmicas

OBJETIVO

Identificará las características de una función exponencial o logarítmica a partir de su grafica. Utilizará los logaritmos comunes y las propiedades de las funciones exponencial en la simplificación de ecuaciones complicadas.

9,1 FUNCIONES EXPONENCIALES.

Funciones trascendentes. Funciones que no son algebraicas

Funciones exponenciales. Se reconocen por medio de su gráfica, la ecuación que la define es: **ax**

Forma general $\mathbf{f : x \to b}$ donde **a, b** , son constantes.

Función simple $\mathbf{f : x \to b^{x}}$

Dominio de la función exponencial : Es el conjunto de los números reales y la ecuación se define**:**

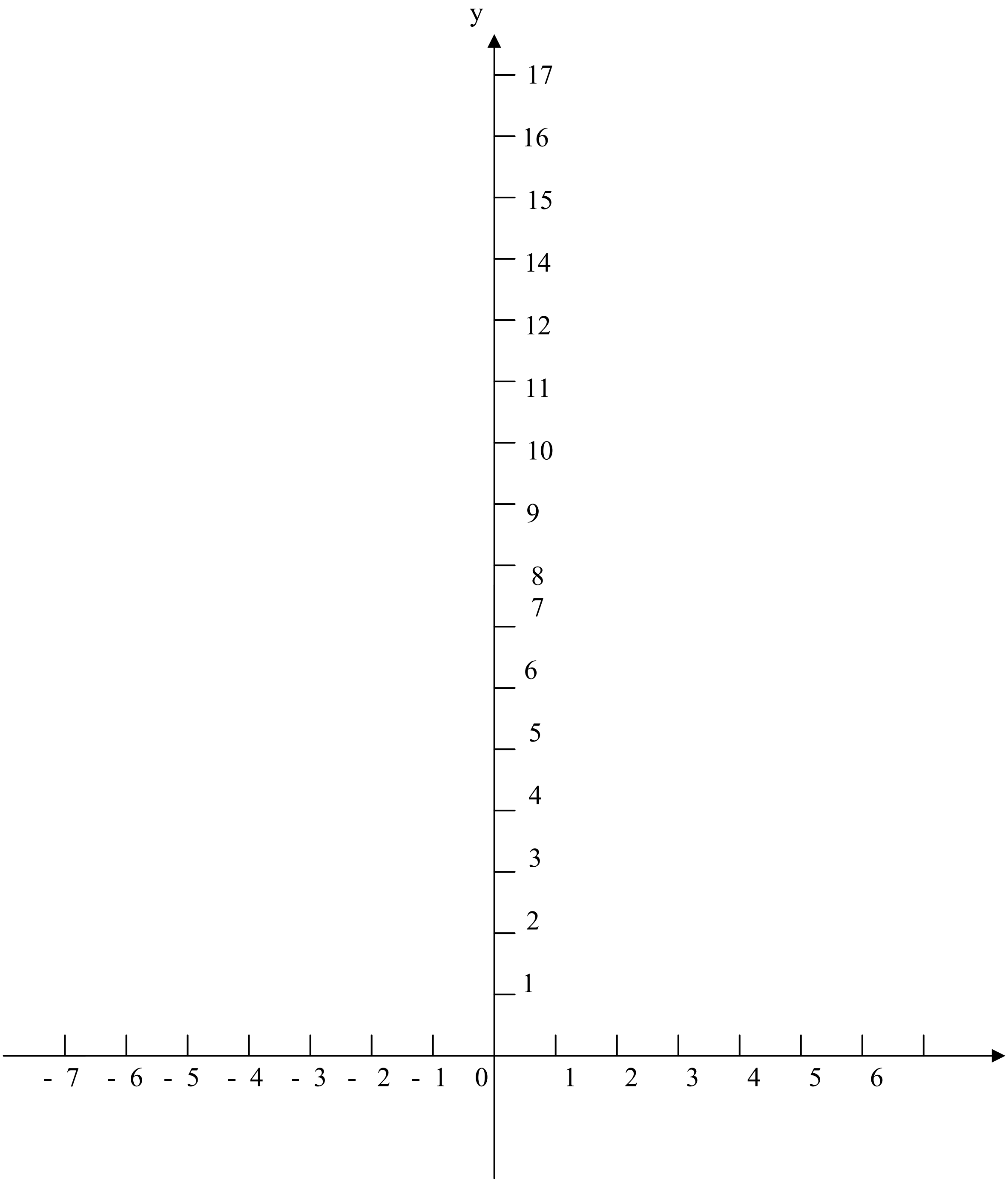
$$\mathbf{Y = f(x) = b^{ax}}$$

Ejemplo:

$$Y = 2^{x}$$

x	- 4	- 3	-2	- 1	0	1	2	3	4
y	1 / 16	1 / 8	1 / 4	1 / 2	1	2	4	8	16

x



7

$$y = \left(1/2\right)^{x}$$

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	1 / 2	1 / 4	1 / 8	1 / 16

La gráfica de la tabulación anterior, es idéntica a la primera con la diferencia que esta dirigida hacia la izquierda.

Las propiedades de la función definida por $y = b^x$

La función es positiva, para todos los valores de **x** la gráfica está sobre el eje x.

Si **b > 1** la función es creciente. Si **x** crece la función crece y al decrecer **x** la función se aproxima pero no alcanza el valor de cero.

Si **b < 1** la función es decreciente, si **x** crece la función decrece y se aproxima a cero.

9,2 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Sucesión: Es el recorrido de una función cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los enteros positivos. El valor funcional del entero 1 es el primer término de la sucesión, el valor funcional del entero 2 es el segundo término de la sucesión.

Ejemplo:

$Y = 3^x$ los valores funcionales correspondientes son: 3, 9, 27, 81 ....3^n ....

DEFINICIÓN DE PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Es una sucesión en la que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término precedente por un mismo número fijo, llamado razón común.

Ejemplo:

La sucesión 3, 9, 27, 81 ....3^n .... es una progresión geométrica con razón común 3 sucesión definida por **f (x) = 3x**

Notación de una progresión geométrica .

a_1 = Primer término de la progresión
r = razón común
n = número de términos de la progresión
An = Ultimo o enésimo término de la progresión
Sn = suma de los **n** primeros términos de la progresión.

Representación de una progresión geométrica.

$a1, a1r, a1r^2, a1r^3, a1r^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a\,r^{n-1}$

Representación del último término

$An = a1 \; r^{n-1}$

Ejemplo:

Si el primer término de una progresión geométrica es 4, el último es 1 / 8 y el número de términos es 6, encontrar la razón común.

Al sustituir los valores en la fórmula para el último término, se tiene:

$1/8 = 4\,(r)^{6-1}$

$1/8 = 4\; r^5$

$1/32 = r^5$

$\left(1/2\right)^5 = r^5$

$1/2 = r$ es la razón común.

Obtención de la suma de términos.

$Sn - r\,Sn = a_1 - a_1\, r^n$

$Sn\;(1 - r) = a_1 - a_1\, r^n$

Al resolver para se tiene.

$$S_n = \frac{a_1 - r\, a_n}{1 - r} \quad , \quad r \neq$$

Progresión geométrica cuando **r = 1**

Ejemplo: Si en una progresión geométrica a = - 2, r = 2 y n = 8 ¿ Cuál es el valor de la suma y el valor del último término?.

Se encuentra el último término.

$$a_n - a_n\, r^{n-1} = (-2)\,(2)^{8-1} = (-2)\,(2)^{7} = (-2)\,(128) = -256$$

Se usa la fórmula para encontrar la suma.

$$S_n = \frac{a_1 - r\, a_n}{1 - r} = \frac{(-2) - (2)\,(-256)}{1 - 2} = \frac{-2 + 512}{-1} = -510$$

9.2.1 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS INFINITAS

El número de términos crece en forma indefinida $|\, r \,| < 1$

Ejemplo:

$1/3$, $1/9$, $1/27$ .... $1/3^n$ el último término es $1/3^n$ puede tender a cero si **n** es muy grande.

Fórmula para la obtención de la suma de términos.

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

Ejemplo: Obtener la suma de la progresión

$1/3$, $1/9$, $1/27$, ... $1/3^n$

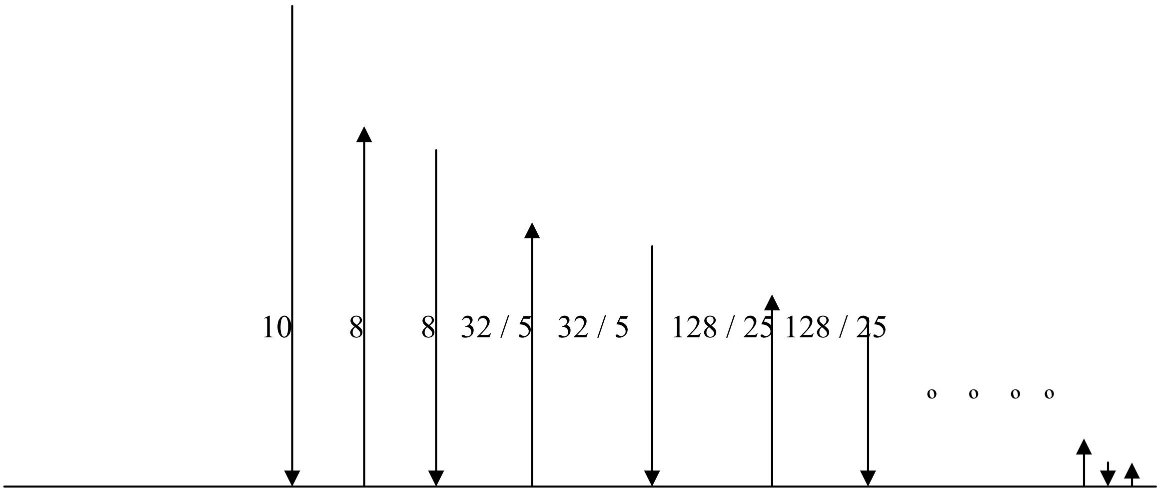
$a_1 = 1/3$, $r = 1/3$

Al sustituir los valores en la fórmula

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2$$

Ejemplo: Se deja caer una pelota desde una altura de 10 m , y rebota 4 / 5 de la distancia que ha caído . Encontrar la distancia total que recorre antes de quedar en reposo.

Solución: El número de rebotes que da la pelota es muy grande antes de quedar en reposo, es una progresión geométrica infinita



En la figura se observa que a partir del primer rebote se forma una progresión en la que los términos se repiten, la distancia recorrida es 2 veces la suma de los términos de la progresión màs los 10 m .que recorrió en la caída inicial.

$a_1 = 8 \quad , \quad r = 4 / 5$

$$Sn = \frac{8}{1 - 4/5} = \frac{8}{1/5}$$

Distancia total recorrida = $(2) \; (4 0) + 10 = 9 0$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Construir las gráficas de las funciones indicadas.

a) $y = 3^x$

b) $y = (1 / 4)^x$

Escribir los primeros cuatro términos de uns progresión geométrica de los planteamientos siguientes.

a) $a_1 = 5$ $r = 2$

b) $a_1 = 3 / 2$ $r = 3 / 2$

.

c) $a_1 = -1 / 5$ $r = -5$

Al indicarse los tres primeros términos 1 / 8 , 1 / 4 , 1 / 2 , encontrar el séptimo termino y la suma de los 7 términos.
En los planteamientos indicados determinar los elementos que faltan

a_1 , r , an , n y Sn

a) $a_1 = 2$, $r = 3$, $n = 6$

b) $Sn = 765$, $a_1 = -3$, $an = 384$

Se deja caer una pelota desde una altura de 12m. En cada rebote se eleva 2 / 3 de la altura alcanzada en el rebote anterior. ¿Qué distancia recorre en el instante que golpea el suelo por quinta vez?

Encontrar la suma y la progresión geométrica indicada.

a) 3 / 9 . 3 / 27 , 3 / 81, 3 / 243 , ...

b) 3 , - 1 , 1 / 3 , - 1 / 9 , 1 / 27 , - 1 / 81 ------

La suma de una progresión geométrica infinita es 25 / 2 y el primer término es 5. ¿Cuál es la razón común.

UNIDAD XV
FUNCION EXPONENCIAL Y FUNCION LOGARITMICA

Modulo 10
Función logarítmica

OBJETIVO
Construirá la gráfica de una función logarítmica, deducirá sus propiedades y su forma exponencial.

Definición del logaritmo de un número.
Es el exponente **y** al que se tiene que elevar a una base **a** `para que nos de un número **x** , donde a, x > 0 y a ≠ 1 , la ecuación de la función logarítmica es:

$$\boxed{F:\ x \rightarrow \log_a x}$$

Representación de la función logarítmica.

$\mathbf{y = \log_a x \leftrightarrow a^y = x}$ y se concluye en $\mathbf{y = \log_a x}$ **y** $\mathbf{a^y = x}$

Ejemplo:

$\mathrm{Log}_2\ 16 = 4 \leftrightarrow 2^4 = 16$

$\log_6\ 1/36 = -2 \leftrightarrow 6^{-2} = 1/36$

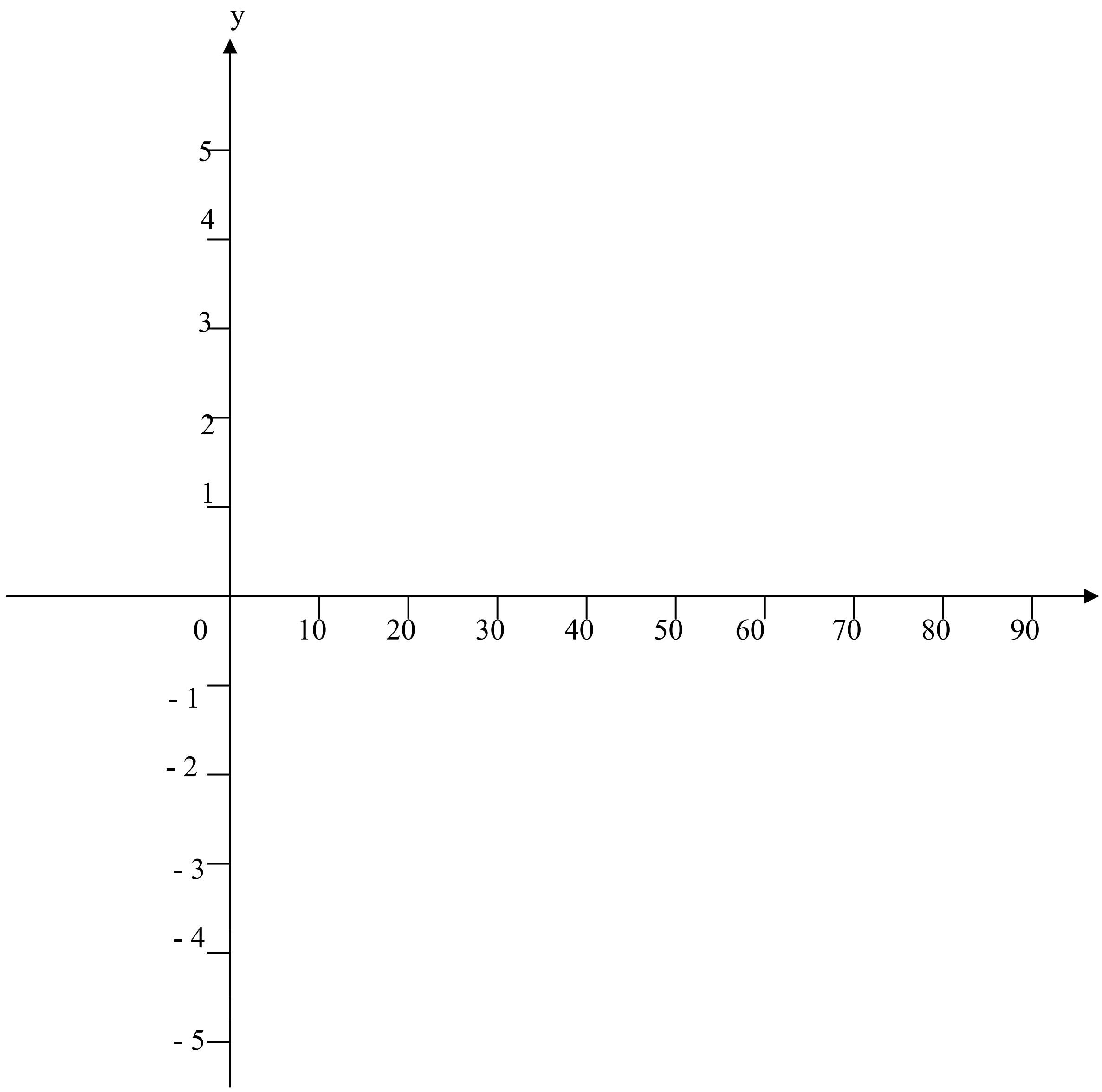
$\log_3\ 1 = 0 \leftrightarrow 7^0 =$

Gráficas de dos funciones logarítmicas, las ecuaciones definidas son:

$y = \log_3 x$, para la ecuaciòn $y = \log_3 x \leftrightarrow 3^y = x$

$y = \log_{1/2} x$

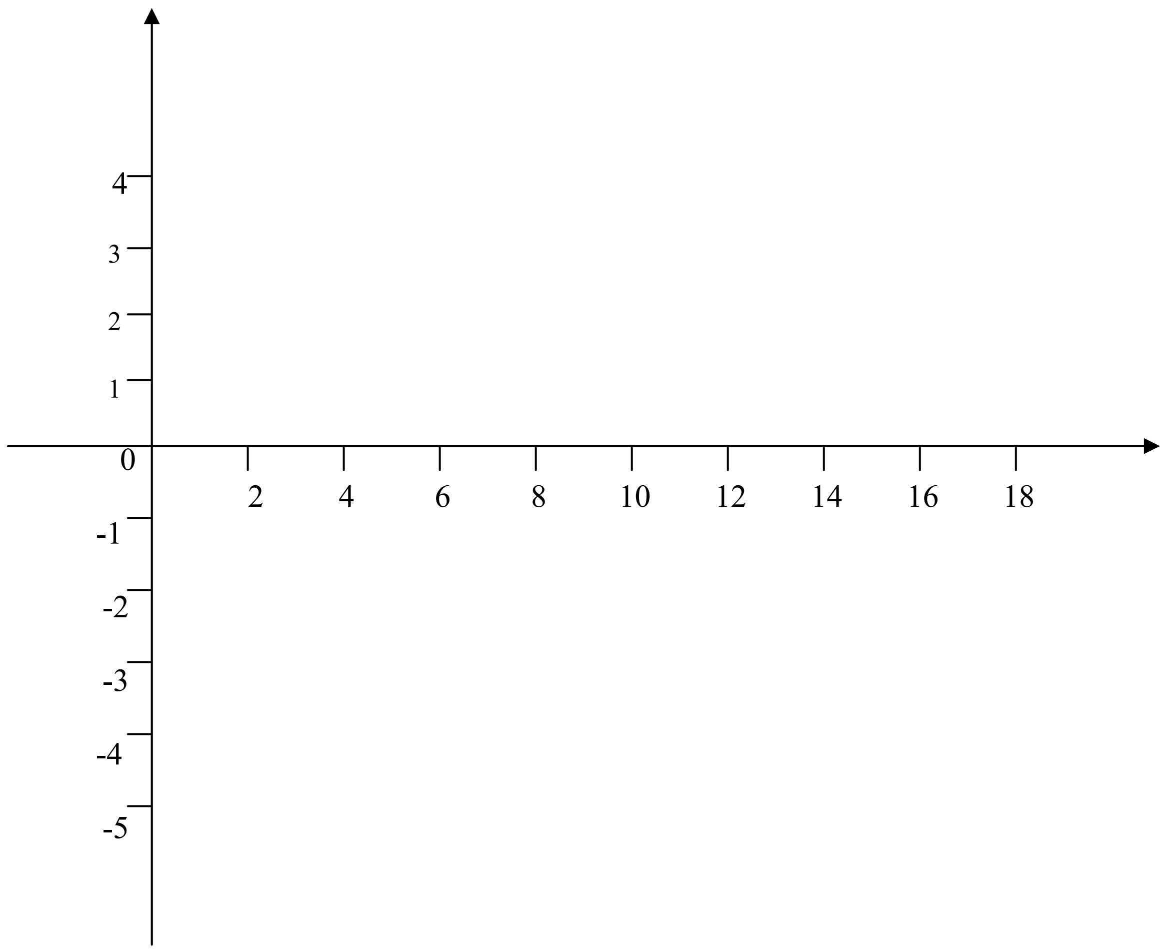
x	1 / 27	1 / 9	1 / 3	1	3	9	27	81
y	- 3	-- 2	-1	0	1	2	3	4



Para la ecuación $y = \log_{1/2} x$ se tiene:

$$y = \log_{1/2} x \leftrightarrow (1/2)^y = x$$

x	16	8	4	2	1	1 / 2	1 / 4	1 / 8	1 / 16
y	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4



Propiedades de la función logarítmica.

Si **a** < **1,** la función es negativa para toda **x** > **1** y positiva para toda **x** < **1**.

La función no está definida para valores negativos de **x**.

Si a < 1, la función es siempre decreciente. Si **x** crece y decrece

Si **a** > **1** **ò** **a** < **1 ,** la gráfica intersecta al eje **x** en (1 , 0)

PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARÍTMICA

1**.- El logaritmo del producto de n números es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los números.**

Si se multiplican los miembros correspondientes de dos igualdades, se tiene:

$a^m \cdot a^n = M \cdot N$

$a^{m+n} = M \cdot N$ Leyes de los exponentes

$\log_a M \cdot N = m + n$ Definición de logaritmo

$\log_a M.N = \log_a M + \log_a N$ Sustituciòn

2.- **El logaritmo de un cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.**

$a^m / a^n = M / N$

$a^{m-n} = M / N$ Leyes de los exponentes

$\log_a M / N = m - n$ Definición de logar

$\log_a M / N = \log_a m - \log_a N$ Sustituciòn

3.- **El logaritmo de un número elevado a una potencia k es igual al producto de k por el logaritmo del número**.

Al elevar ambos miembros de la igualdad a una potencia **k,** se tiene

$(a^m)^k = M^k$

$a^{km} = M^K$

$\log_a M^k = km$ Definición de logaritmo

$\log_a M^k = k \log_a M$ Sustituciòn

Ejemplos:

$\log_5 (1/2)(5/3) = \log_5 1/2 + \log_5 5/3$

$\log_2 100/90 = \log_2 100 - \log_2 90$

$\log_4 (28.75)^{3/2} = 3/2 \log_4 28.75$

$\log_{10} \sqrt[4]{728} = \log_{10} (728)^{1/4} = 1/4 \log_{10} 728$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- En los problemas siguientes construir la gráfica de la función.

a) $y = \log_2 x$

b) $y = \log_{1/3} x$

2.- En los problemas escriba el logaritmo de la expresión en otra forma equivalente al usar las propiedades de los logaritmos.

a) $\log_{15} (36)(84)$

b) $\log_{10} 75/15$

c) $\log (408)^{1/2}$

UNIDAD XV
FUNCION EXPONENCIAL Y FUNCION LOGARITMICA

Modulo 11
Logaritmos comunes y de las funciones trigonométricas

OBJETIVO
Obtener la característica y mantisa del algoritmo de un número en base 10, con el uso de la tabla identificar las funciones trigonometrías y efectuar las operaciones aritméticas de logaritmos comunes.

11.1 LOGARITMOS COMUNES.

Tiene usos computacionales por el sistema de base 10. Henry Briggs uso por primera vez los logaritmos comunes. Hay otro sistema de logaritmo el de base (e) llamados naturales (e = 2.71628.....)

Logaritmos en base 10.

$\log_{10} .0001 = -4 \rightarrow 10^{-4} = .0001$ $\qquad$ $\log_{10} 1000 = 3 \rightarrow 10^{3} = 1000$

$\log_{10} .01 = -2 \rightarrow 10^{-2} = .01$ $\qquad$ $\log_{10} 10 = 1 \rightarrow 10^{1} = 10$

$\log_{10} .1 = -1 \rightarrow 10^{-1} = .1$ $\qquad$ $\log_{10} 1 = 0 \rightarrow 10^{0} = 1$

Los ejemplos anteriores se pueden extender en forma indefinida para números menores que .0001 o números mayores de 10000.

Partes del logaritmo de un número.

Característica .- Parte entera del húmero que puede ser positiva, negativa o cero. Depende de la colocación del punto decimal en el número.

Mantisa.- Fracción decimal positiva que es mayor o igual a cero y menor que uno. Depende de los dígitos que forman el número.

11.1.1 REGLA PARA OBTENER LA CARACTERÍSTICA DEL LOGARITMO DE UN NUMERO.

Posición de referencia.- Queda entre los primeros dos dígitos significativos que forman el número, ejemplo:

CANTIDAD	POSICIÓN DE REFERENCIA
513.6	entre 5 y 1
.0672	entre 6 y 7

La característica del logaritmo de un número en base 10
Es el nùmero de dígitos que hay de la posición de referencia al punto decimal del número; es positiva si el punto decimal está a la derecha de la posición de referencia negativa si el punto decimal está a la izquierda. En base 10 el logaritmo se escribe con su abreviatura. **(log)** si la característica es negativa se escribe el signo negativo.

Ejemplo:
log .311 = 2
log 3.11 = 0
log 1425.6 = 3
log 8456.67 = 3
log .00590 = - 3
log .0365 = - 2

11.1.2 USO DE LA TABLA PARA OBTENER LA MANTISA DEL LOGARITMO DE UN NUMERO.

Nota: Hacer uso del apéndice en la tabla de logaritmos de los números de la página 285 y 286 del libro correspondiente al cuarto semestre de matemáticas.

La tabla està diseñada de la siguiente forma:
En la primera columna se encuentran los números del 10 al 99.
En la parte superior tiene 10 columnas marcadas del 0 al 9.
Partes proporcionales son 9 columnas más y se abrevian (p.p)

Ejemplo
Encontrar el log 86.4
Ubicar en la tabla de la primera columna en forma vertical el nùmero 86
Ubicar a la derecha la columna encabezada con 4 y se lee .9365 , que corresponde a .9385, las mantisas son siempre menores que 1.

El log 86.4 = 1.9365

Encontrar el log 193.8

Ubicar en la primera columna el número 19
Ubicar a la derecha hasta columna encabezada con 3 y se lee 2856
En el mismo renglón del 19 hasta la columna 8 de partes proporcionales y se lee 18 que se le suma al 2856 para obtener la mantisa

2856 + 18 = 2874 **log 193.8 = 2.2874**

1.1.1.3 DADO EL LOGARITMO DE UN NÚMERO, OBTENER EL NÚMERO.

Uso del antilogaritmo.
La primera columna empieza en .00 y termina en 0.99 las demás columnas son idénticas a las de la tabla 1.

Ejemplo:
Encontrar N si log N = 2.8126 , N = antilog 2.8126.

Ubicar en la primer columna de la tabla II hasta el .81 sobre ese mismo renglón en horizontalidad la columna 2 y se lee 6486, se busca la parte proporcional de 6 que se lee 9 se obtiene la operación de suma .6486 + 9 = 6495

La característica del logaritmo es 2 , el punto decimal está a dos dígitos a la derecha de la posición de referencia.

log N = 2.8126 → N = 649.5
Ejemplo**: Encontrar N si log N = - 3.7168**

En la tabla II se lee para .716 el número 5200 y sobre la columna 8 encabezada a la derecha la parte proporcional se lee 10 y se obtiene la suma 5200 + 10 = 5210
log N = - 3.7168 → N = .005210.

11.2 LOGARITMOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Se usan logaritmos de las funcione, en la tabla està incluidla característica del logaritmo.

Ejemplo: Encontrar el **log tan 38° 20´**
log tag 38° 20´ = - 1 .8980

Ejemplo: Encontrar el **log sen 26° 47´ ,** al no aparecer en la tabla se debe **interpolar** como se menciona:

log sen 26° 40´ = - 1.6521

log sen 26° 50´ = - 1.6546

log sen 26° 47´ = log sen 26° 40´ + 7 / 10 [log sen 26° 50´ - log sen 26° 40´]

= - 1.6521 + 7 / 10 [- 1.6546 - (- 1.6521)

= - 1.6521 + 7 / 10 [.0025]

= - 1.6521 + .0017

= - 1.6538

Ejemplo : Encontrar el àngulo θ entre **0° y 90° , si log sen θ = - 1.6887**

Se localiza el valor 1.6887 en la columna log sen θ entre 29 ° 10´ y 29° 20´

Se realiza la sustracción de los valores encontrados.

[log sen θ = 1.6887] - [log sen 29° 10´ = - 1. 6878] = .0009
[log sen 29° 20´ = 1.6901] - [log sen 29° 10´ = 1.6878] = .0023

Se aplica la proporcionalidad con la diferencia de los 10´ de los ángulos.

10 ____________________ .0023

x ____________________ .0009

$$x = \frac{(.0009)\ 10}{.0023} \approx 4$$

El ángulo encontrado de θ = 29° 10´ + 4' = 29° 14´.

11.3 USO DE LOS ALGORITMOS COMUNES EN OPERACIONES ARITMÉTICAS.

Ejemplo: Efectuar con el uso de logaritmos la siguiente operación:
(1.816) (.00345), Se hace M = (1.816) (.00345)

log M = log 1.816 + log .00345

log 1.816 = 0.2591

log .00345 = - 3. 5378

log M = - 3 .7969

M = antilog -3 .7969 = .006265

Ejemplo: Efectuar $\mathbf{\dfrac{(3.96)\ (.00817)}{43.5}}$

log M = log 3.96 + log .00817 - log 43.5

log 3.96 = 0.5977

log .00817 = - 3.9122

-2.5099 logaritmo del denominador

log 43.5 = - 1.6385

log M = - 4.8714

M = antilog - 4.8714 = .0007437

Ejemplo: Efectuar $(.00976)^3$

$\log M = 3 \log (0.00976)$

$3 \log .00976 = 3 (-3.9894)$
$\log M = -7.9682$

M = antilog -7.9662 = .0000009294

Ejemplo: Efectuar $\sqrt{426.7}$

$M = (426.7)^{1/2}$

$\log M = 1/2 \log 426.7$

$1/2 \log 426.7 = 1/2 \ (2.6301)$

$\log M = 1.3150$
M = atilog 1.3150 = 20.65

Ejemplo: Efectuar $\left(\dfrac{(16.21)^{2} (0.0747)^{1/2}}{(5.716) \ (.00818)^{1/5}} \right)$

$\log M = (2 \log 16{,}21 + 1/2 \log .0747) - (\log 5.716 + 1/5 \log .00818)$

$2 \log 16.21 = 2(1.2098) = 2.4196$

$1/2 \log .0747 = 1/2 \ (2.6733) = 1.4366$

logaritmo del numerador 1.8462

$\log 5.716 = 0.7571$

$\log .00818 = (- 3.9128)$

$$= \frac{-3.9128}{5} \quad \frac{2.9128 - 5}{5} = .5825 - 1$$

$= -1.5825$

$\log 5.716 = 0.7571$

$\log .00818 = -1.5825$

logaritmo del denominador = 0.3396

logaritmo del numerador = 1.8562

Por ser triángulos congruentes el $P(\theta + \pi) = \left(-3/5\ ,\ 4/5\right)$, los valores de las funciones son:

Sen $(\theta + \pi) = 4/5$	cot $(\theta + \pi) = -3/4$
Cos $(\theta + \pi) = -3/5$	sec $(\theta + \pi) = -5/3$
Tg $(\theta + \pi) = -4/3$	csc $(\theta + \pi) = 5/4$

Si a θ se le aumenta o disminuye un múltiplo entero de 2π $[\theta + k(2\pi)]$ coincide con el punto original $P(\theta)$, estos puntos tienen las mismas coordenadas y se obtiene la siguiente definición:

Para toda $\theta \in R$ y $k \in 1$ se tienen las cuatro funciones circulares periódicas en 2π.

Sen $[\theta + k(2\pi)] = \text{sen } \theta$	sen $[\theta + k(2\pi)] = \sec \theta$
Cos $[\theta + k(2\pi)] = \cos \theta$	csc $[\theta + k(2\pi)] = \csc \theta$

|

Las funciones circulares de tangente y cotangente difieren en el periodo en virtud de que la $\text{tg } \theta = y/x$ y la $\cot = x/y$, en el punto $P(\theta)$ al aumentar $P(\theta + k\pi)$ se da la siguiente definición:

Para toda $\theta \in R$ y $k \in 1$ se tiene que

Tg $(\theta + k\pi) = \text{tg } \theta$

Cot $(\theta + k\pi) = \cot \theta$

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACION

Encontrar el valor exacto de csc , cos y cot de 3π/ 2 con su respectiva gráfica

Determinar el valor de las seis funciones circulares para el respectivo valor de θ

Resolver los problemas con el auxilio de la gráfica (5 , -4) y (-2 , 6) .

$$\text{logaritmo del denominador} = \underline{0.3396}$$

$$\log M = 1.5166$$

$$M = \text{antilog } 1.5166 = 32.86$$

REACTIVOS DE EVALUACIÓN

1.- Encontrar en la tabla 1 el logaritmo de los números indicados

a) log 56.71
b) log .179
c) log .0972
d) log .3085

2.- Encontrar **N** en la tabla II

a) log N = 4.9731
b) log N = 3.0057
c) log N = -1.5924
d) log N = - 3.6101

3.- Calcular el valor de las siguientes operaciones con es uso de logaritmos.

a) (.00749) (36.87)

b) $\frac{(.3729)\ (.0824)}{(11.19)}$

c) $\frac{\sqrt[3]{39.26}\quad\sqrt{48.91}}{\sqrt[4]{.0081}}$

UNIDAD XV
FUNCION EXPONENCIAL Y FUNCION LOGARITMICA

Modulo 12
Aplicaciones de la función exponencial

OBJETIVO
Resolver problemas con la aplicación de la función exponencial, ley del crecimiento natural, propiedades y ecuaciones logarítmicas.

12 .- APLICACIONES DE LA FUNCION EXPONENCIAL

12.1 INTERES COMPUESTO

Aplicación de la fórmula:

$$\mathbf{A = P\,(1 + r)^{n}}$$

P = cantidad invertida inicialmente
r = interés anual
n = número de años
A = acumulación total al final de **n** años

Ejemplo: Si se invierten $ 1.000,00 al 8 % de interés compuesto anual, ¿ qué cantidad total se tiene al final de 5 años.?

P = $ ..000.,00
r = 8 % = .08
n = 5 años
A = ¿

Se sustituyen los valores en la fórmula.

$$\mathbf{A = P\,(1 + 1)^{n}}$$

$$= 1000\ (1 + .08)^{5}$$

$$= 1000\ (1.469328)$$

$$= \$1469.32$$

Ejemplo: Encontrar la cantidad total al cabo de 10 años que se obtiene con un capital inicial de $ 1 ,.200.00 al 10 % de interés anual.

$P = 1200$

$r = .10$

$n = 10$

$A = 1200 (1 + .10)^{10}$

Se hace el uso de logaritmos

$\log A = \log 1200 (1.10)^{10}$

$$\log A = \log 1200 + 10 \log 1.10$$
$$\log 1200 = 3.0792$$
$$\log 1.10 = .4139$$

$$\log A \quad 3.4931$$
$$A = \text{antilog } 3.4931 = 3112$$

Fórmula para capitalizar semestral , por trimestre o mensual.

$$A = P \left(1 + r / s\right)^{n s}$$

Ejemplo: Encontrar la cantidad total al cabo de 8 años , que se obtiene con un capital inicial de $ 600 al 8 % de interés anual.

a) Capitalización trimestral

s = 4 (nùmero de perìodos de capitalización en un año)

$$A = P \left(1 + r / s\right)^{n s}$$

$$= 600 \left(1 + .08 / 4\right)^{(8)(4)}$$

$$= 600 (1 + .02)^{32}$$

$$= 600 (1.02)^{32}$$

$$= 600 (1.8845)$$

$$= \$ 1.130,72$$

b) Capitalización mensual

$s = 12$

$$A = 600 \left(1 + .08 / 12\right)^{(8)\ (12)}$$

$$= 600 \left(1 + .006666\right)^{96}$$

$$= 600 \left(1.006666\right)^{96}$$

$$= 600 \ (1.8924)$$

$$= \$1,135.47$$

12.2 CRECIMIENTO NATURAL

ley de crecimiento natural

$A = Pe^{rn}$ ($e = 2.71828.......$)

Ejemplo: La población de una cierta ciudad en el año de 1974 es de 1.000,000 y crece continuamente a una tasa $r = 3.5$ % anual. Encontrar la población aproximada qu tendrà 1980, 1990.

a) 1980

$P = 1.000.000$

$r = 3.5 \% = .035$

$n = 6$

$A = Pe^{rn}$

$$= 1.000,000 \ e^{(0.035)\ (6)}$$

$$= 1.000.000 \ e^{0.210}$$

$$\log A = \log 1.000,000 \ e^{.210}$$

$$= \log 1.000.000 + .210 \log e \qquad (\log = .4343)$$

$$\log 1.000.000 = 6000$$

$$.210 \log e = \underline{0912}$$

$$\log A = 6.0912$$

$$A = \text{antilog } 6.0912 = 1.233,677 \text{ habitantes}$$

b) 1990

$P = 1.000.000$

$r = 3.5\,\% = .035$

$n = 16$

$$A = 1.000.000 \; e^{(.035)(16)}$$

$$= 1.000.000 \; e^{.56} \qquad (e^{.56} = 1.750671)$$

$$= 1.000.000 \; (1.75º67)$$

$$= 1.750.671 \text{ habitantes}$$

12.3 CALCULO DEL LOGARITMO DE UN NUMERO RESPECTO A CUALQUIER BASE

$y = \log_a N$

$a^y = N$

Se resume en las siguientes expresiones para ser aplicadas.

$$y = \frac{\log_b N}{\log a} \qquad N = \frac{\log_b N}{\log a}$$

Ejemplo: Encontrar una expresión que relacione los logaritmos de base e ò naturales con los logarìtmos de base 10.

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e} \log_{10} N = \frac{1}{.4343} \log_{10} N$$

$$\log_e N = 2.303 \log_{10} N = 2.303 \log N$$

Ejemplo: Encontrar **$\log_8 326$**

$$\log_8 326 = \frac{\log 326}{\log 8} = \frac{2.5232}{.9031} = 2.7829$$

12.4 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

Ejemplo: Resolver para **x** la siguiente ecuación $5^{x+2} = 6^{x+1}$

$\log\ 5^{x+2} = \log^{x+1}$

$(x+2)\ \log\ 5 = (x+1)\ \log\ 6$

$(x+2)\ (.6989) = (x+1)\ (.7782)$

$.6989\,x + 1.3978 = .7782\,x - 1.3978$

$.6989\,x - .7782\,x = .7782 - 1.3978$

$.0793\,x = -.6196$

$$x = \frac{.6196}{.0793}$$

$x = 7.81$

Ejemplo Resolver por **x** la siguiente ecuación logarítmica

$\log_2\ (x + 1) + \log_2\ (x + 1) = 2$ (se aplica la propiedad de logaritmos de un cociente)

$$\log_8 \frac{x + 1}{x} = 2$$

$x + 1 / x = 8^2$

$x + 1 / x = 64$

$x + 1 = 64\,x$

$x - 64x = -1$

$x = 1 / 63$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Calcular la cantidad compuesta al cabo de 15 años, con un capital inicial de $7000 al 9 % de interés anual. a) Capitalización semestral.

2.- La población de una ciudad en 1975 es de 1000.000 y ha crecido en forma continua en los últimos 10 años a una tasa del 3.5 % anual. ¿ Cuántos habitantes tendrá el año 2000 si continùa la misma tasa de crecimiento?

3.- Encontrar los siguientes logaritmos.

a) $\log_{15} 21.7$ b) $\log_{9} 10.81$ c) $\log_{8} 1.86$

4.- Resuelve para **x** las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^{3x-1} = 8^{x+1}$ b) $3^{x-2} = 2^{x+3}$

5.- Resolver para **x** las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_{18}(x + 2) + \log_{18}(x - 1) = 1$

b) $\log_{6}(3x - 1) - \log_{6}(2x + 3) = 2$

UNIDAD XVI
RESOLUCION DE TRIANGULOS

Modulo 13
Valores y aplicaciones de las funciones circulares

OBJETIVO
Aplicación de las funciones trigonométricas, interpolación circular, identificación de ángulos y resolución de triángulos.

13.1 VALORES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES EN UN NUMERO REAL CUALQUIERA.

$\text{sen } \pi / 6 = 0.5$

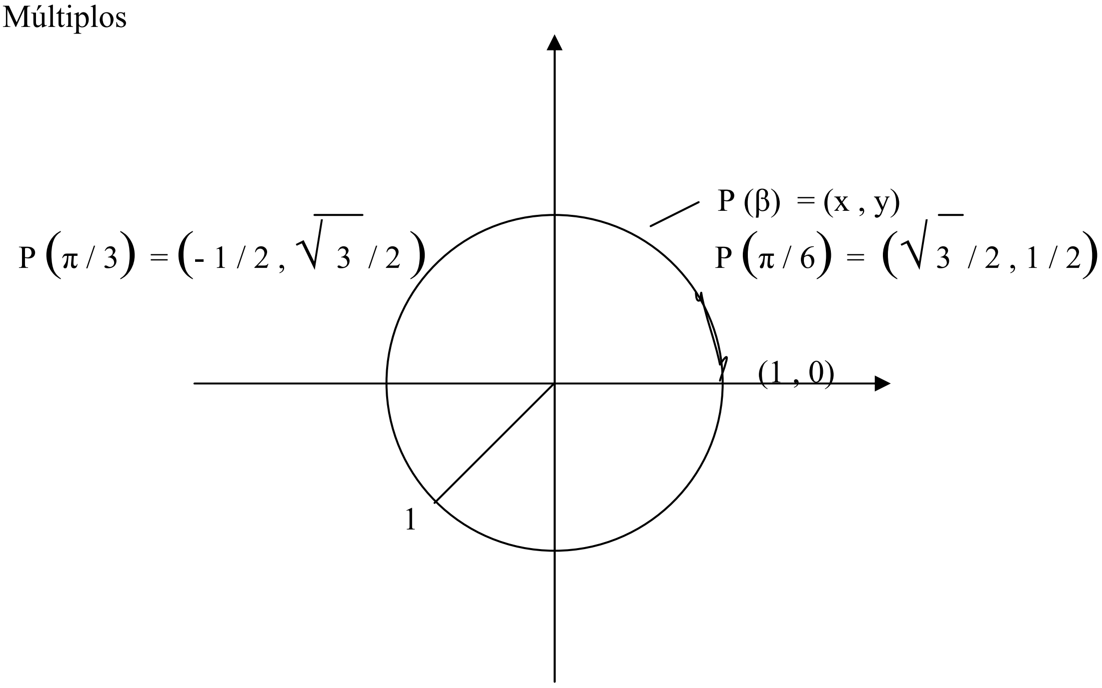
$\text{sen } 2\pi / 2 = \sqrt{3} / 2$

$\text{tg } 2\pi / 3 = -\sqrt{3}$

Valores expresados por radicales.

$\pi / 6$, $\pi / 3$, $\pi / 4$

Múltiplos



13.2 MANEJO DE LA TABLA.

La función circular de un número real es igual a la cofunciòn de **$\pi / 2$** menos el número.

Ejemplo:

$\cot \beta = tg\left(\pi / 2 - \beta\right)$ **donde** $\beta \ \varepsilon \ R$ $sen\ 0.5 = \cos\left(\pi / 2 - .5\right) = \cos 1.0708$

$tg\ 0.5708 = \cot\left(\pi / 2 - .5708\right) = \cot 1$

$\csc 1.000 = \sec\left(\pi / 2 - 1.000\right) = \sec 0.5708$

$\cot \beta = tg\left(\pi / 2 - \beta\right) \ , \beta \in R$

Ejemplo 1: Determinar cot 0.1367

Solución : Se busca el valor indicado en la tabla en la columna de radianes y a la izquierda se busca la función circular **cot** para leer el valor correspondiente.

Grados	Radianes	sen	tg	cot	cos		
	0.1367			7.2687			

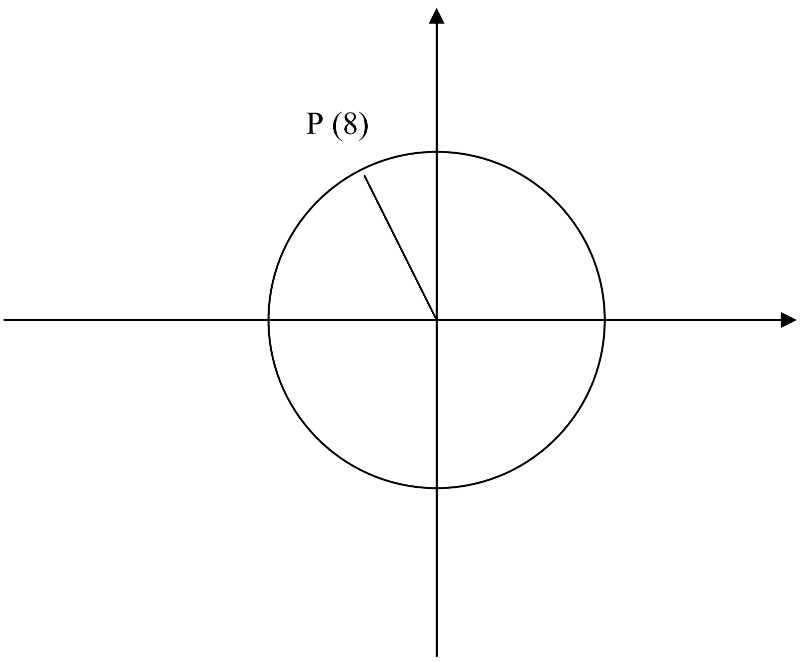
Ejemplo: Determinar **sen 1.4520**

Solución: El valor no està en la tabla, se busca el valor aproximado màs cercano como se menciona:

$$sen\ 1.4520 \approx sen\ 1.4515 = 0.9929 \bullet$$

$$sen\ 1.4515 \approx 0.9929$$

Ejemplo: Determinar **cos 8**

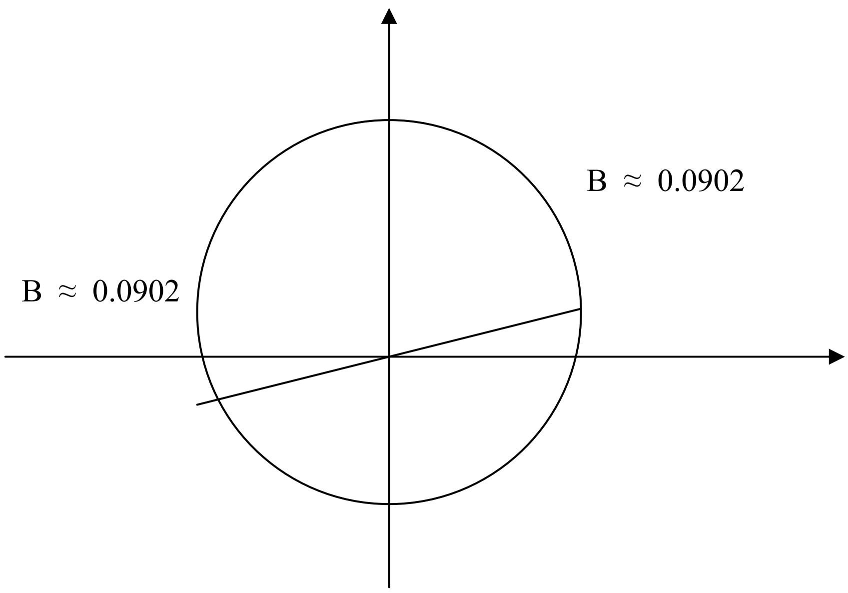


$8 = 5(1.5708) + 0.1460$, el arco reducido es $1.5708 - 0.1460 \approx 1.4248$

$\cos 8 \approx - \cos 1.4248$, lo cual nos conduce igual que las fórmulas de reducción a
$\cos 8 \approx - 0.1449$

Ejemplo, Determinar el número β entre 0 y 2π tal que **$\cot \beta = 11.0000$**

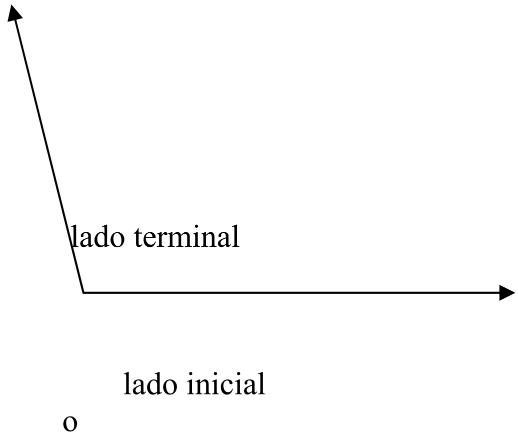
Solución: **$\cot \beta > 0$,** el punto terminal **$P(\beta)$** està en el 1 o 111 cuadrantes, se busca wel arco en el tercer cuadrante el arco reducido es **$\beta \approx 0.0902$** como se ilustra en la figura..



$B' \approx \pi + 0.0902$ ò $\beta = 3.2318$

13.3 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CIRCULARES A ANGULOS

Definición de ángulo:
Unión de dos semirrectas (lados del ángulo) con el mismo punto extremo llamado vértice



13.4 MEDIDA DE LOS ANGULOS.

Revolución:
El número de vueltas que necesita dar el lado inicial para generar el àngulo.

Angulo en revoluciones $= \dfrac{s}{2 \pi r}$, el **sistema sexagesimal** es el que determina la

unidad de medida en **grados ,** un ángulo de 360° equivale a un ángulo de una revolución. (1° = 60´ (minutos) y 1´= (segundos).

La medida de un ángulo en grados está dada por la expresión:

Angulo en grados = (número de revoluciones) (360°) . Ejemplos

Angulo de media revolución = 1/ 2 (360°) = 180°

Angulo de un cuarto de revolución = 1 / 4 (360°) = 90°

Angulo de dos revoluciones = 2 (360°) = 720°

El sistema más utilizado en matemática es el cíclico, la unidad de medida es el **radián**

La magnitud de un ángulo medido en radianes se da por la expresión:

Angulo en radianes = (número de revoluciones) (2π). La longitud de la circunferencia unitaria es **2π**

Ejemplos:
Media revolución es $1 / 2 (2 \pi) = \pi$ radianes.
Una revolución es $1 (2\pi) = 2\pi$ radianes.
Un cuarto de revolución es $1 / 4 (2\pi) = \pi / 2$ radianes
Una revolución = 360°
π radianes = 180°
1 radián = $\pi / 180$

Expresar 120° en radianes.

Solución:
$120° \left(\pi / 180 \right) = 120° \ \pi / 180 = 2\pi / 3$

Ejemplo: Expresar **3 / 4** de revolución en grados.

Solución:

$$3/4 \text{ revoluciòn } \frac{360°}{1 \text{ revoluciòn}} = \frac{3\ (360^{-})}{4} = 270°$$

Ejemplo: Expresar el àngulo de 150° 20´ en radianes

Solución:
150° 2 0´ = 90° + 60° 20´ (distribución de los grados)

$150°\ 20' = \pi / 2 + 1.0530 = 1.5708 + 1.0530$ **= 2.6238 radianes**

Ejemplo:
La longitud de un arco determinado por un ángulo central de **2 / 5** en una circunferencia de 10 centímetros de radio es.

$$\mathbf{s = r\,\beta = 10 \left(2 / 5 \right) = 4 \text{ cm}}$$

En la misma circunferencia un arco cuya longitud es de 20 centímetros, subtiende un ángulo central.

$\beta = s / r = 20 / 2 = 10$ radian

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Determinar el valor de cada una de las siguientes expresiones, con el uso de la tabla el valor más próximo.

a) cos 0.1018
b) tg 1.3
c) cot o.96

2.- Encontrar el número β entre 0 y $\pi / 2 = 1.5708$ (tomar el valor más cercano.

a) sen $\beta = 0.2810$
b) cot $\beta = 5.0650$

3.- Ubicar los ángulos que se expresan , en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares, indicar los lados inicial y terminal.

a) 3 / 4 revoluciòn
b) 135°
c) $2\pi / 3$

4.- Transformar los ángulos a radianes , tomar el valor màs próximo de la tabla.

a) 15° 40´

b) 165° 13´

5.- Determinar el ángulo que subtiende un ángulo central de 25° en una circunferencia que tiene de radio 5 cm.

6.- Un minutero de un reloj mide 8 cm. ¿ Qué distancia **(s)** recorre la punta del minutero
durante 30 minutos?.

UNIDAD XVI
RESOLUCION DE TRIANGULOS

Modulo 14
Interpretación geométrica de las funciones circulares

OBJETIVO
Determinar el valor exacto de una función circular de un ángulo, expresarlo en grados o radianes y utilizar el método de interpolación.

14.1 FUNCIONES CIRCULARES DE ANGULOS.

Consiste en observar el valor de la función circular en grados , cuantas veces cabe el valor de π = 180° en ángulos de 30° , 45 ° y 90° para expresar la operación correspondiente.

Ejemplo: Determinar el valor exacto de **sen 45°**

Solución: $\mathbf{sen\ 45° = sen\ \pi / 4 = 1 / \sqrt{2} = \sqrt{2}\ / 2}$

Ejemplo: Determinar el valor exacto de **cos 120°**

Solución : $\mathbf{cos\ 120° = cos\ 4\ (30°) = cos\ \left(\pi / 6\right)} = \mathbf{2\pi / 3 = -1 / 2}$

Ejemplo: Calcular el valor de **25° 17´**
Solución: Se utiliza el método de interpolación lineal por que el valor se encuentra entre 25° 10´ y 25° 20´, se busca en la tabla lll.

	β		sen β		
	25° 10´	**7**	0.4253	**x**	
10	25° 17´		$\square$		**26**
	25° 20´		0.4279		

Se realiza la proporción de las diferencias de los valores obtenidos que se expresan resaltados.

$$7 / 10 = x / 26$$

$$x = \frac{7\,(26)}{10} = 182 / 10 = 18.2$$

Se redondea el valor obtenido de $x = 18$ y se añade al valor 0.4253 resulta:
sen 25° 17′ = 0.4253 + .0018 = 0.4271

Ejemplo:
Si **cot β = 2.2030,** hallar β, éste es un ángulo agudo positivo

Solución:

	β		cot β		
10	24° 20′	**x**	2.2113	**83**	**170**
	$\boxed{\quad}$		2.2030		
	24° 30′		2.1943		

$$x / 10 = 83 / 170$$

$$x = \frac{83\,(10)}{170} = 4.8 \text{ Se redondea a } 5$$

Se suma a 24° 20′ + 5′ = 24° 25′ , **β = 24° 20′**

Ejemplo ilustrativo, **sen 500°**

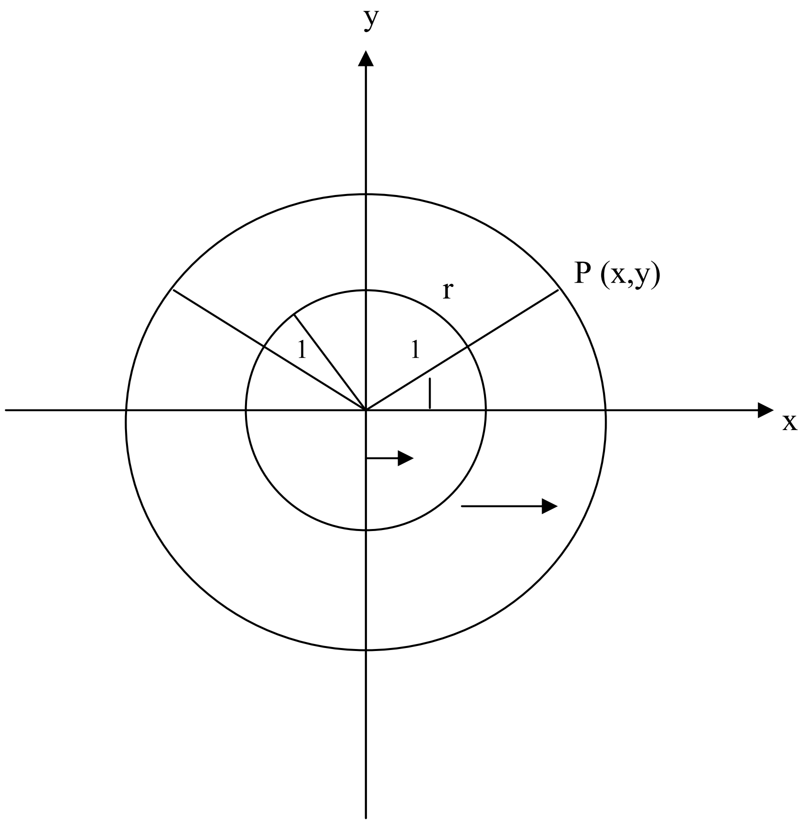
Solución: Se toma la equivalencia que se tiene entre grados y radianes en el caso de **π / 2** = 90°.

Sen 500° = sen [5 (90°) + 50°] = cos 50°
Al usar el àngulo reducido quq es 90° - 50° = 40°

sen 500 ° = sen 40°

14.2 INTERPRETACION GEOMÉTRICA DE FUNCIONES CIRCULARES DE ANGULOS.

Angulo β en posición normal por la rotación de un segmento de recta.



Si P (x,y) es un punto situado a una distancia del origen, en el lado terminal de un ángulo β, en posición normal , las coordenadas de P en términos de r y β. Se expresan por :

$x = r \cos \beta$ y $y = r \operatorname{sen} \beta$ Se concluye en:

$\cos \beta = x / r$ y $\operatorname{sen} \beta = y / r$ $(r \neq 0)$

Si se elevan ambos miembros de las coordenadas se tiene:

$$x^2 + y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \beta + r^2 \cos^2 \beta$$
$$= r^2 (\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta)$$
$$= r^2$$

$x^2 + y^2 = r^2$ de donde $y = \sqrt{x^2 + y^2}$

Las coordenadas del punto **P** a una distancia **r** del origen que se encuentra en el lado terminal de un ángulo β en posición normal, en términos de r y β, las cuales son (r cos β, r sen β).

Ejemplo:
Sea β un ángulo en posición normal, tal que su lado terminal contiene a (-4 , 3).
Determinar **sen β cos β, y tg β :**
Solución:
Se aplica la fórmula para calcular el radio con el punto indicado.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = 5$$

$$\text{sen } \beta = y / r = \mathbf{3/5}, \quad \cos \beta = x / r = \mathbf{-4/5}, \quad \text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{3/5}{-4/5} = \mathbf{-3/4}$$

Ejemplo:
Sea β un ángulo en posición norma , de manera que su lado terminal contiene a (3,-4). Determinar **r sen β, cos β y sec β**
Solución:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\text{sen } \beta = y / r = -4/5, \quad \cos \beta = x / r = 3/5, \quad \sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} = \frac{1}{3/5} = 3/5$$

REACTIVOS DE EVALUACIÒN

1.- Encontrar los valores numéricos exactos de las expresiones siguientes:

a) sen 330°
b) tg 225°

2.- Determinar β expresándolo en grados entre **0° y 360°** que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones.

a).- $\text{sen } \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b).- $\cos \beta = \sqrt{2} / 2$

c).- $\text{tg } \beta = -1$

d).- $\sec \beta = 2$

3.- Escribir cada una de las expresiones como función de un àngulo agudo positivo menor que 45°

a).- sen 230°

b).- tg 125°

c).- cos (- 148°)

4.- Determinar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones :

a).- sen 54° 22´

b).- cot 50° 57´

c).- cos 32° 13´

5.- Determinar β como un àngulo agudo positivo, utilizar el método de interpolación, expresar en grados y minutos.

a).- sen β = 0.9468

b).- tg β = 2.775

6.- El lado terminal de un çada àngulo en posición normal contiene a el punto indicado, Determinar las funciones circulares seno, coseno y tangente .

a).- (-3 , 4)

b).- (12 , 5)

c).- (3 , 8)

UNIDAD XVI
RESOLUCION DE TRIANGULOS

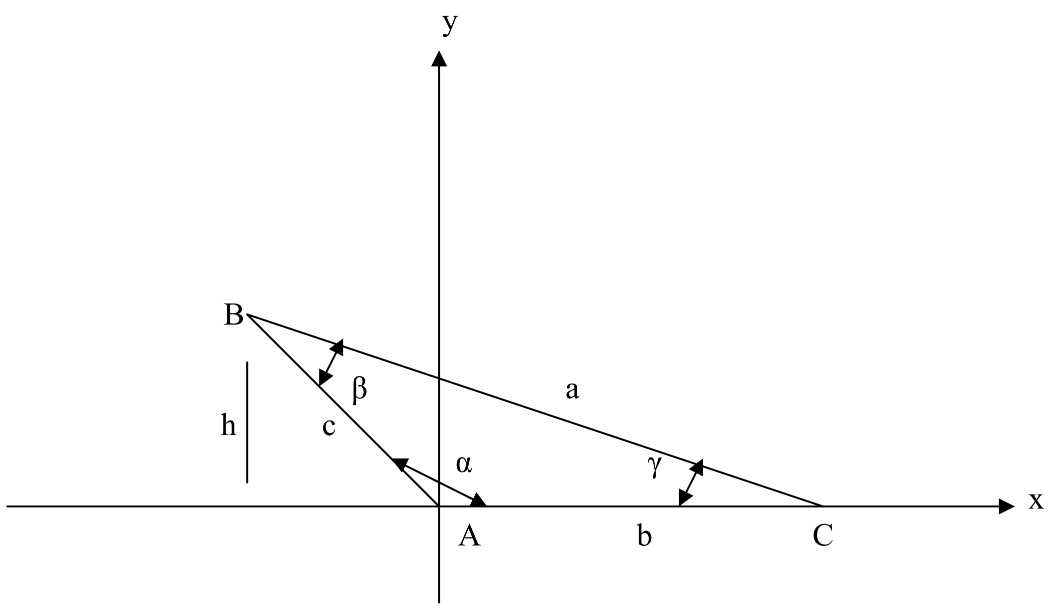
Modulo 15
Aplicación de las funciones circulares a la resolución de triángulos

OBJETIVO
Identificar, deducir el teorema de los senos y resolver problemas del triángulo rectángulo.

APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES CIRCULARES A LA RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS.

Un triángulo puede resolverse cundo se conoce:
1.- Dos ángulos y un lado.
2.- Dos ángulos y el periodo comprendido.
3.- los tres lados
4.-Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

TEOREMA DE LOS SENOS.



El área del triángulo se da por: La mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que forman, en términos de **a , c** y el ángulo que forma (**β**), a , b y el ángulo que forma (γ)

$A = 1/2$ (base) (altura), al sustituir se tiene:

$A = 1/2 \; b \; c \; \text{sen}\,\alpha$

$A = 1/2 \; a \; c \; \text{sen}\,\beta$ — Se igualan dos expresiones

$A = 2/2 \; a \; b \; \text{sen}\,\gamma$

$1/2 \; bc \; \text{sen}\,\alpha = 1/2 \; ac \; \text{sen}\,\beta$

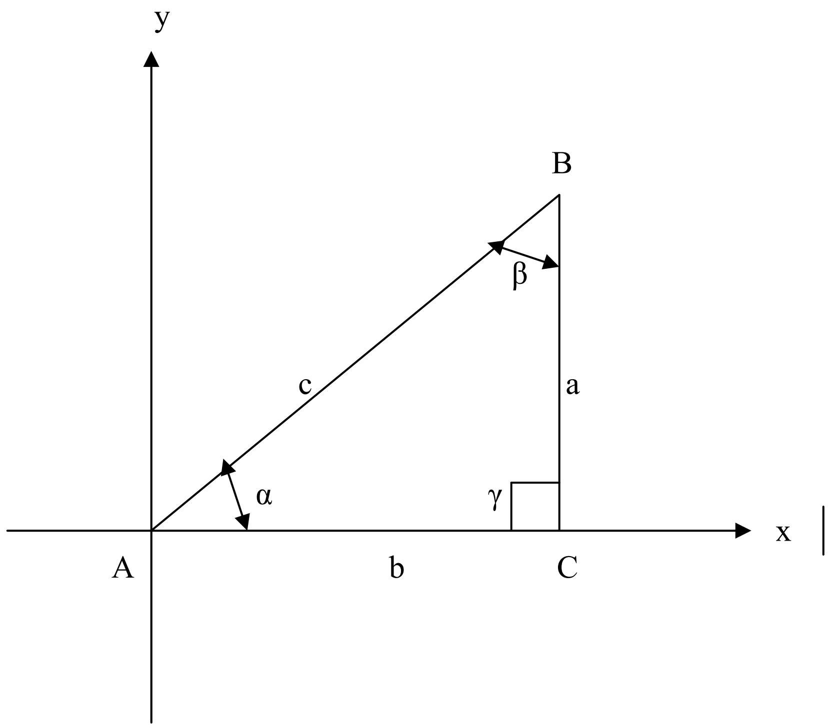
$b \; \text{sen}\,\alpha = a \; \text{sen}\,\beta$

$a / \text{sen}\,\alpha = b / \text{sen}\,\beta$

Teorema de los senos

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}}$$

15.2 RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS.



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, $\gamma = 90°$

$\cos\alpha = (90° - \beta)$

$= \cos 90° \; \cos\beta + \text{sen}\; 90° \; \text{sen}\,\beta$

$= \text{sen}\,\beta$

$\cos\alpha = \text{sen}\ \beta \rightarrow \cos\alpha = b / c$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{a / c}{b / c} = a / b,\ \cos \neq 0$$

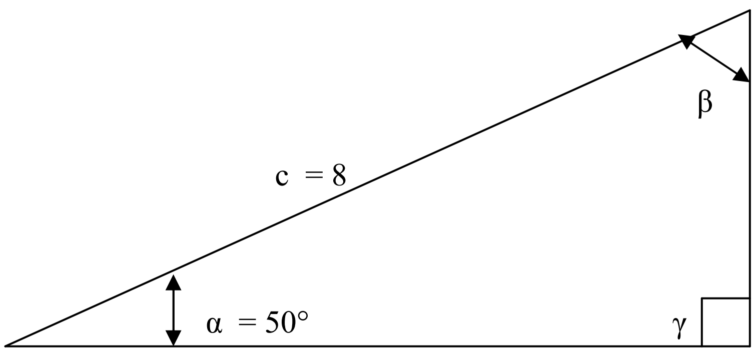
En todo triángulo rectángulo se cumplen las funciones trigonomètricas en ángulos menores de 90°. Funciones inversas

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto à } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad , \quad \csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente à } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad , \quad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente.}} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Ejemplo
Resolver el triàngulo rectángulo ACB, sì $c = 8$, $\alpha = 50°$
Solución:



$\alpha + \beta = 90°$, entonces la medida de $\beta = 40°$

El elemento no conocido es **a ,** es:

$\text{sen}\ \alpha = a / c$, $a = c\ \text{sen}\ \alpha$

$\cos\alpha = b / c$, $b = c\ \cos\alpha$

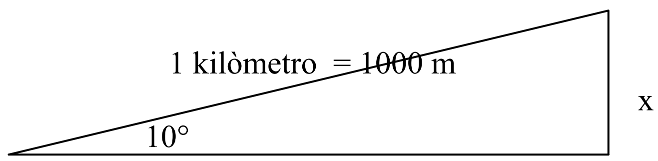
Se busca en la tabla de funciones trigonomètricas el valor de 40° por que es el complemento de 90° del valor de $\alpha = 50°$. Al sustituir los valores se tiene:

$a = 8 \cos 50° = 8 (0.7660) = 6.128$

$b = 8 \text{ sen } 50° = 8 (0.6428) = 5.1424$

Se concluye en lo siguiente:
$a = 6.128$, $b = 5.1424$ y $\beta = 40°$

Ejemplo:
Un camino tiene una pendiente de 10° ¿ cuànto asciende el camino por cada kilòmetro?



$$\text{sen} = \frac{x}{1000}$$

$x = 1000 \text{ sen } 10°$

$x = 1000 (0..1736) = 173.6$

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

a) Determinar los ángulos y lados no conocidos , se tiene en cada caso $\gamma = 90°$.

1.- $a = 48.620$ $b = 37.640$

2.- $c = 84.275$ $\beta = 41° 42'$

3.- $b = 3572$ $c = 4846$

4.- $a = 32$ $\alpha = 17°$

5.- Una escalera de 15 metros està apoyada en una casa de manera que forma un àngulo de 70° con la horizontal , ¿ A què altura està el extremo superior de la escalera ¿

6.- Un parque rectangular mide 30 por 270 metros . Determinar la longitud de la diagonal y el àngulo que èsta forma con el lado mayor.

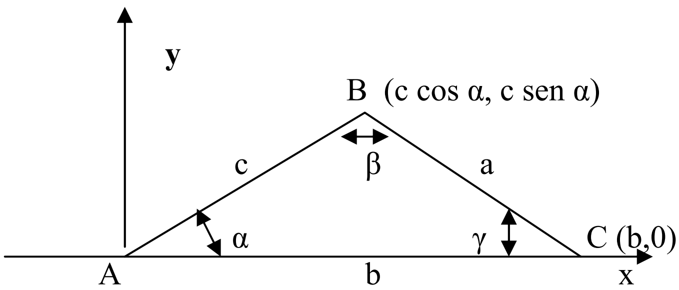
UNIDAD XVI
RESOLUCION DE TRIANGULOS

Modulo 16
Teorema de los cosenos

OBJETIVO
Resolver un triángulo oblicuángulo con la aplicación de los teoremas de senos, cósenos y tangentes.

16.1 Teorema de los cósenos.

Se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido. Al colocar el triángulo ABC en un sistema de coordenadas cartesianas, el ángulo **α** esté en posición normal y AC conocida con el sentido positivo del eje x, para identificar las coordenadas de **B (c cos α , c sen α)**



Se aplica la distancia entre dos puntos para encontrar BC.

$$a^2 = \overline{BC}^2 = (c \cos\alpha - b)^2 + (c \operatorname{sen}\alpha - 0)^2$$

$$= c^2 \cos^2\alpha - 2bc \cos\alpha + b^2 + c^2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$= b^2 + c^2 (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2bc \cos\alpha$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos a$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$

16.1.1. SOLUCION DE TRIANGULOS OBLICUANGULOS.

Tiene dos ángulos menores de 90° y uno de ellos es mayor de 90° y menor de 180°.

Aplicación de los senos y cósenos.

Ejemplo:
Resolver el triángulo ABC , al conocer los valores de **a** = 130, b = 220 , $\gamma = 28°$

Solución:
Se utiliza el teorema de los cósenos para encontrar **c**

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\ \cos\ 28°}$$

$$\mathbf{c^2 = (130)^2 + (220)^2 - 2\ (130)\ (220)\ (\,.2829)}$$

$$\mathbf{c^2 = 16900 + 48400 - 50501\,.88}$$

$$\mathbf{c^2 = 14798.12}$$

$$\mathbf{c = 121.64}$$

Se utiliza el teorema de los senos para encontrar $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{a} = \frac{\text{sen}\ \gamma}{c}$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{a\ \text{sen}\ \gamma}{c} = \frac{130\ \text{sen}\ 28°}{121\,.64} = \frac{130\,(.4695)}{121\,.64} = \text{sen}\ \alpha = 0.50176 = 30°\ 7'$$

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (30°\ 7' + 28°) = 121°\ 53'$$

16.2 PRIMER TEOREMA DE LAS TANGENTES.

$$\boxed{\frac{\text{tg}\ \ 1/2\ (\alpha - \beta)}{\text{tg}\ \ 1/2\ (\alpha + \beta)} = \frac{a - b}{a + b}} \qquad \boxed{\frac{\text{tg}\ \ 1/2\ (\gamma - \alpha)}{\text{tg}\ \ 1/2\ (\gamma + \alpha)} = \frac{c - a}{c + a}}$$

RESOLUCION DE TRIANGULOS CUALESQUIERA

Ejemplo:
Resolver el triángulo ABC si $a = 16,\ b = 26,\ c = 34$

Solución:
Se aplica el Teorema de los Cósenos como se menciona:

$a^2 = (16)^2 = 256$ $\qquad\qquad$ $2\,a\,b = 832$

$b^2 = (26)^2 = 676$ $\qquad\qquad$ $2\,a\,c = 1068$

$c = (34) = 1156$ $\qquad\qquad$ $2\,b\,c = 1768$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = 0.8914 \ \rightarrow\ \alpha = 27°$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} = 0.2363 \ \rightarrow\ \beta = 47°\ 26'$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b} = 0.2692 \ \rightarrow\ \gamma = 105°\ 37'$$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°\ 3'$

Ejemplo:

Resolver el triángulo ABC al conocer $a = 66,\ b = 28,\ \gamma = 47°$

Solución:
Se utiliza el Primer Teorema de las Tangentes. Y se tiene:

$\boldsymbol{\alpha + \beta = 180° - 47° = 133°}$

$$\frac{\operatorname{tg}\ 1/2\ (\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}\ 1/2\ (\alpha + \beta)} = \frac{a - b}{a + b}$$

$$\operatorname{tg}\ 1^{o}/2\ (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b}\ \operatorname{tg}\ 1/2\ (\alpha + \beta)$$ Al tomar logaritmos

$$\log\ tg\ 1/2\ (\alpha - \beta) = \log\ ((a-b) - \log\ (a+b) + \log\ tg\ 1/2\ (\alpha + \beta)$$

$$= \left(\log 38 - \log 94\right) + \log\ tg\ 66°\ 30'$$

$$= 1.5798 - 1.9731 + .3617$$

$$= 0.0316$$

$$= - 1.9685$$

$$1/2\ (\alpha - \beta) = 42°\ 55'$$

$$\alpha - \beta = 85°\ 50'$$

$\alpha = 109°\ 25'$ y $\beta = 23°\ 35'$

Para encontrar **c** se utiliza el Teorema de los Senos.

$$\frac{c}{\text{sen}\ \gamma} = \frac{a}{\text{sen}\ \alpha}$$

$$c = \frac{a\ \text{sen}\ \gamma}{\text{sen}\ \alpha}$$

$$= \frac{66\ \text{sen}\ \gamma}{\text{sen}\ \alpha}$$

$$= \frac{66\ \text{sen}\ 47\ °}{\text{sen}\ 109°\ 45'}$$

Al tomar logaritmos se tiene:

$$\log\ c = \log 66 + \log\ \text{sen}\ 47° - \log\ \text{sen}\ 109°\ 25'$$

$$= 1{,}8195 + (- 1.8641) - (- 1.9737)$$

$$= 1.7099$$

$$c = 57.27$$

Posibilidades que se presentan cuando se conocen **a,** **b**, y ***α***, siendo **α < 90°,** en ***est***e análisis se presentan los casos siguientes:

1) a < b, sen α no hay solución. (Figura 1)

11) a = b sen α se forma un triangulo rectángulo. (Figura 2)

111) b sen α < a < b hay dos soluciones. (Figura 3)

1V) a ≥ b hay una solución. (Figura 4)

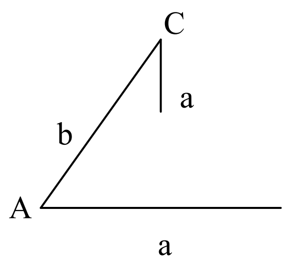


Figura 1

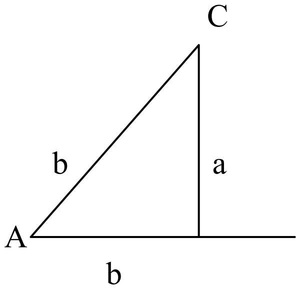


Figura 2

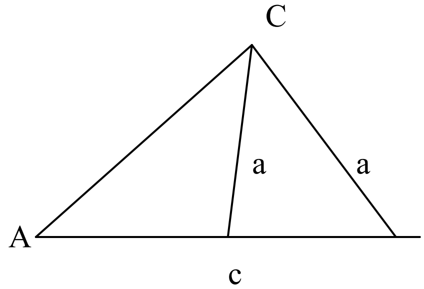
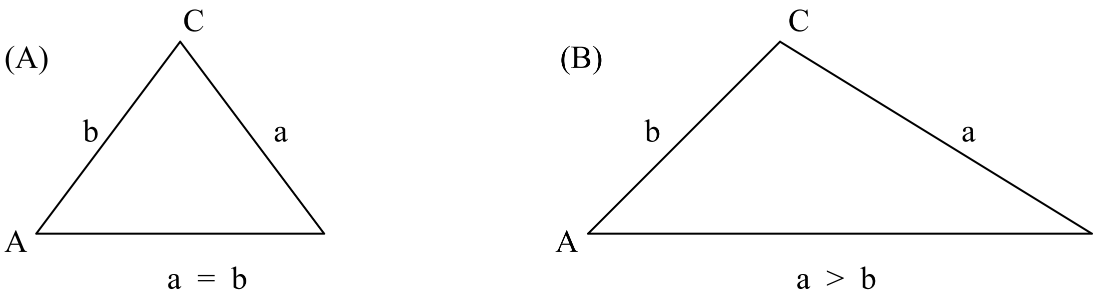


Figura 3



Figuras 4 (A) y (B)

REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

1.- Resolver los triángulos ABC de acuerdo a los valores que se expresan en cada caso.

a) $\alpha = 46°$;	$\gamma = 56° \ 40'$;	$c = 45$
b) $\beta = 15°$	$\gamma = 52° \ 50'$;	$b = 85$
c) $b = 25$;	$c = 18$;	$\alpha = 60°$
d) $a = 3$	$b = 4$	$c = 6.1$

2.- Determinar las longitudes de los lados de un paralelogramo si la distancia mayor mide 74 metros y forma con los lados, ángulos de 16° y 26° respectivamente.

3.- Un poste que se aparta 10° de la vertical hacia la región donde está el sol, proyecta una sombra de 30 metros de longitud, cuando el ángulo de elevación del sol es de 40°. Encontrar la longitud del poste.

REACTIVOS DE MATEMATICAS CUATRO
1.-Es la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos:
A.-Funcòn
B,-Constante
C,.Variable
D.-Exponente
2.-La ecuación de primer grado representa una funcòn :
A.-Lineal
B.-Cuadràtica
C.-Racional
D,.Polinomial
3.-El contradominio consta de un solo elemento, la función es :
A.-Constante
B.-Circular
C,.Compuesta
D.-Logaritmica
4.-La representacòn gràfica de una función cuadrática es:
A.-Paràbola
B.-Lineal
C.-Cubica
D.-Polinomial
5.-Si n como exponente es nùmro impar, la función es :
A.-Cubica
B.-Cuadràtica
C.-Lineal.-
D.-Exponencial
6,.Toda función polinomial es :
A.-Racional
B.-Lineal
C.-Logaritmica
D.-Constante
7.-Las funciones no algebraicas se conocen como:
A.-Trascendentes
B.-Comunes
C.-Inadvertidas
D.-Excluyentes