PREPARATORIA ABIERTA PUEBLA

RESOLUCION DE PROBLEMAS COLINEALES Y CONCURRENTES

ELABORÓ

LUZ MARÍA ORTIZ CORTÉS

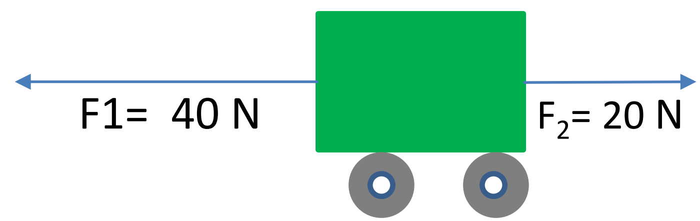
Sistema de fuerzas colineales

Si sobre un objeto actúan dos o más fuerzas con una misma línea de acción, es decir, en la misma dirección, se forma un sistema de fuerza colineales; como cuando sobre un carrito se aplican dos o más fuerza colineales, la resultante de las mismas dependerá del sentido en que actúen éstas.

Caso 1: Fuerzas colineales con sentidos contrarios.

La resultante de las dos fuerzas colineales será igual a la suma algebraica:

$$R= \sum F= F_1 \; + \; F_2= -40\text{ N} \; + \; 20\text{ N}= -20\text{ N}$$

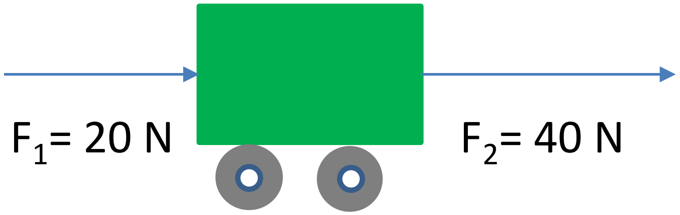


La resultante tiene signo negativo, lo que indica que el carrito se moverá hacia la izquierda con una fuerza resultante cuyo valor es de 20 N.

Sistema de fuerza colineales

Caso 2: Fuerzas colineales con el mismo sentido.

La magnitud de la resultante de las dos fuerzas colineales será igual a la suma algebraica:



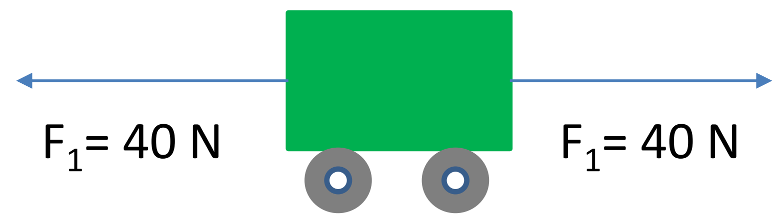
$R = \sum F = F_1 + F_2 = 20\ N + 40\ N = 60\ N$

Las dos fuerzas colineales actúan hacia la derecha, por lo que su signo es positivo y el valor de la resultante que producen es de 60 N.

Sistema de fuerzas colineales

- **Caso 3: fuerzas colineales con magnitudes iguales y sentidos contrarios.**

La resultante de las dos fuerzas colineales será igual a su suma algebraica:



$$R = \sum F = F1 \; + \; F2 = -40\text{ N} \; + \; 40\text{ N} = 0$$

Al sumar las dos fuerzas, la resultante es igual a cero, por lo que el carrito estará en equilibrio o en reposo, ya que las fuerzas se equilibran entre sí.

Suma de dos vectores concurrentes o angulares

- Para sumar dos vectores concurrentes en forma gráfica se utiliza el método del paralelogramo; para encontrar la resultante por el método analítico se utiliza el Teorema de Pitágoras si los dos vectores forman un ángulo de 90°, pero si forman cualquier otro ángulo se usará la ley de los cosenos, y para calcular el ángulo de la resultante se aplicará la ley de los senos.

Funciones trigonométricas

- En un triángulo rectángulo (con ángulo de 90°) se encuentran las funciones trigonométricas:

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{coseno } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente alfa} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

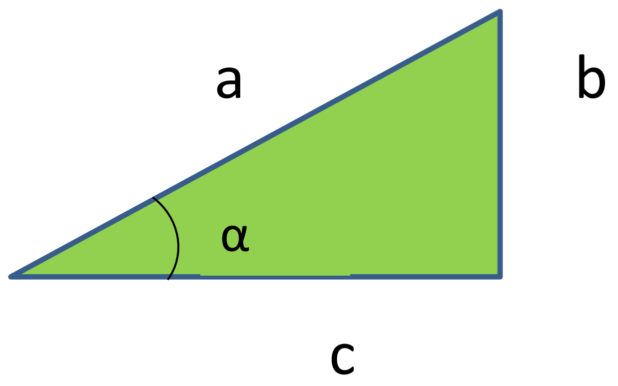
Funciones trigonométricas

- Considerando al siguiente triángulo rectángulo:

  a= hipotenusa

  b= cateto opuesto del ángulo α

  c= cateto adyacente al ángulo α



Funciones trigonométricas

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$ $\qquad b = a\ \text{sen}\ \alpha$

$\cos\ \alpha = \dfrac{c}{a}$ $\qquad c = a \cos \alpha$

$\tan \alpha = \dfrac{b}{c}$ $\qquad b = c \tan \alpha$

Funciones trigonométricas

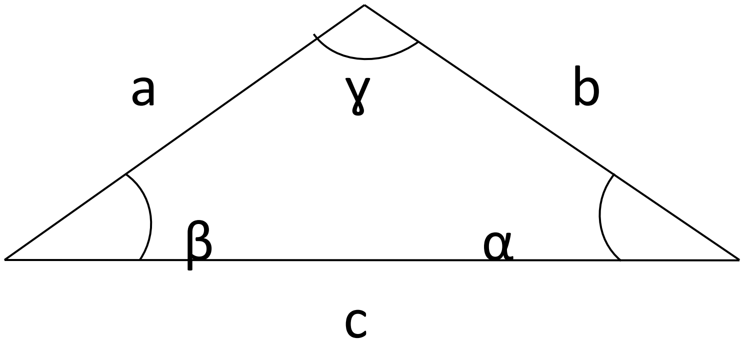
- Las expresiones serán de utilidad si se conoce uno de los ángulos agudos (los que miden menos de 90°) y uno de los lados de un triángulo rectángulo, con ello se podrán calcular los otros dos lados, por medio de las funciones trigonométricas.
- Si se conocen dos lados de un triángulo rectángulo, se puede calcular el otro lado utilizando el teorema de Pitágoras: "la suma de los cuadros de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Ley de los senos y de los cosenos

- La ley de los senos establece que: en cualquier triángulo oblicuo (aquellos que no tienen ningún ángulo recto) se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$



Ley de los cosenos

- La ley de los cosenos establece que: en cualquier triángulo, en especial en los oblicuos, el cuadrado de un lado es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados, menos su doble producto multiplicado por el coseno del ángulo formado por estos dos lados.

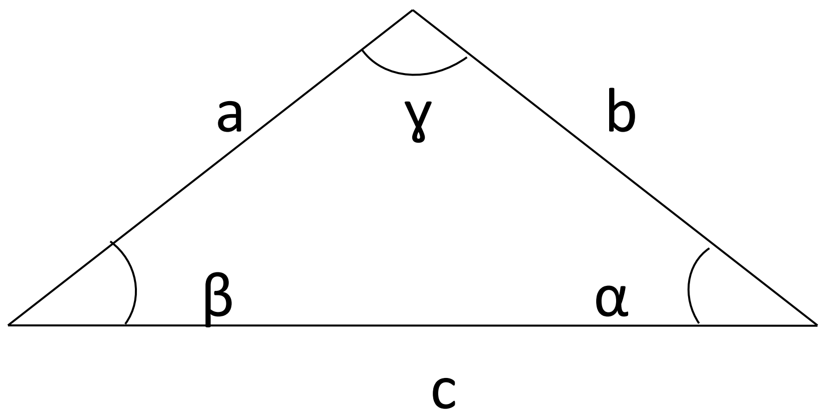
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Esta ley servirá para encontrar el lado de un triángulo si se conocen los otros dos y el ángulo que forman entre sí. Se empleará para encontrar la resultante de la suma de dos vectores concurrentes o angulares.

Ley de los cosenos



Funciones trigonométricas

- Signos de las funciones trigonométricas:

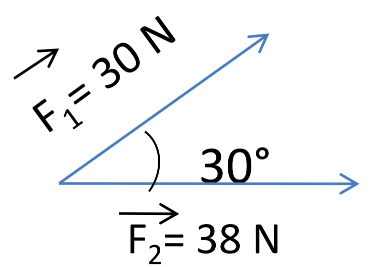
Función	Primer cuadrante 0 a 90°	Segundo cuadrante 90 a 180°	Tercer cuadrante 180 a 270°	Cuarto cuadrante 270 a 360°
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+

Suma de dos vectores concurrentes o angulares.

- Para sumar dos vectores concurrentes en forma gráfica se utiliza el método del paralelogramo; para encontrar la resultante por el método analítico se utiliza el Teorema de Pitágoras si los dos vectores forman un ángulo de 90°, pero si forman cualquier otro ángulo se usará la ley de los cosenos, y para calcular el ángulo de la resultante se aplicará la ley de los senos.

Problemas resueltos

1. Por el método gráfico y analítico hallar la resultante y el ángulo que forma con la horizontal en la siguiente suma de vectores:

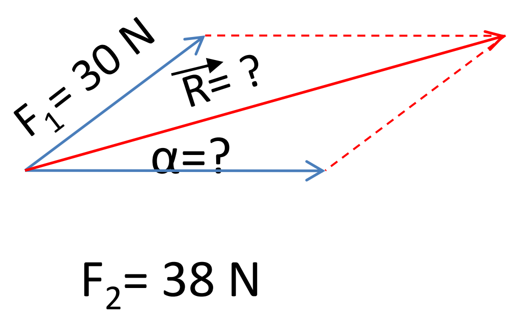


Solución por el método gráfico: se establece una escala y se trazan los vectores con un ángulo de 30°. Se dibuja la paralela de cada vector y se obtiene el paralelogramo. Se mide la resultante y el ángulo formado.

Problemas resueltos

Método gráfico:

Escala:1 cm= 10 N



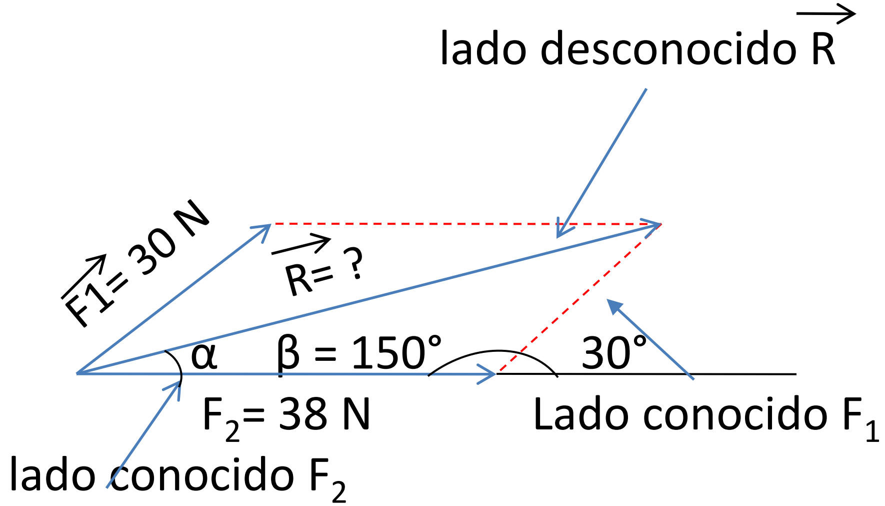
R= 65.7 N

α = 13.2°

PROBLEMAS RESUELTOS

- Método analítico:

  Para calcular la magnitud de la resultante se debe encontrar uno de los tres lados de un triángulo oblicuo, cuyos lados conocidos son $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$. Aplicando la ley de los cosenos, se toma en cuenta que en el triángulo oblicuo el ángulo β formado por los dos vectores es de 150°.



PROBLEMAS RESUELTOS

- Aplicando la ley de los cosenos para encontrar la magnitud de la resultante:

$$R= \sqrt{F_1 \;+\; F_2 \;- 2\,F_1F_2 \cos\beta}$$

Sustituyendo:

$$R= \sqrt{(30\ N)^2 + (38\ N)^2 - 2(30\ N)(38\ N)\cos 150°}$$

Como el ángulo formado por los dos lados conocidos es mayor que 90°, se busca el coseno de 150° de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\cos 150° = -\cos(180 – 150) = -\cos 30$$

Problemas resueltos

- Se busca el valor de coseno de 30° y se le agrega el signo menos, o bien, el coseno de 150° se determina con calculadora científica:

$$R=\sqrt{900\ N^2 \ + 1444\ N^2 - 2\ (30\ N)\ (38\ N)(-.8660)}$$

$$R=\sqrt{2344\ N^2 \ + \ 1974.48\ N^2} = \sqrt{4318.48\ N^2} = 65.7\ N$$

Para calcular el ángulo α que forma la resultante con respecto a la horizontal se aplica la ley de los senos:

Problemas resueltos

$$\frac{F_1}{\text{sen } \alpha} = \frac{R}{\text{sen } \beta} \qquad \text{sen } \alpha = \frac{F_1 \text{ sen } \beta}{R}$$

Como $\beta = 150°$ tenemos que sen β = sen 150°. Como el ángulo es mayor que 90° encontramos el valor del seno 150° con la siguiente expresión:

$$\text{sen } 150° = \text{sen } (180° - 150°) = \text{sen } 30° = 0.5$$

o bien:

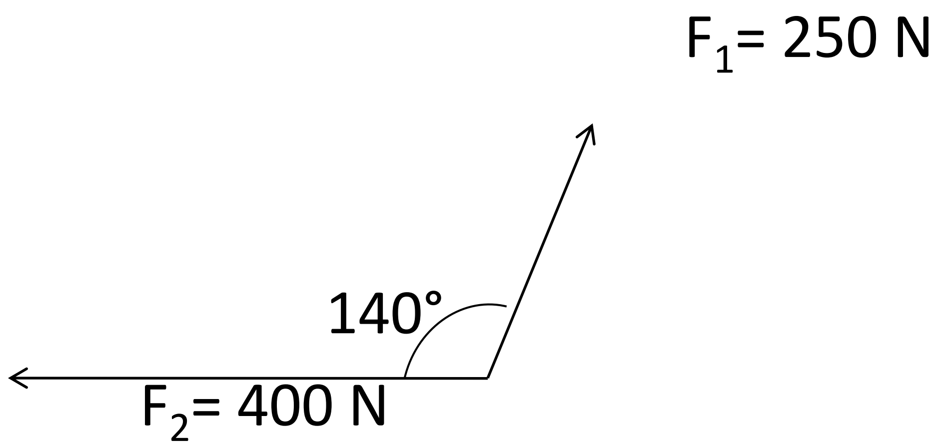
$$\text{sen } \alpha = \frac{30 \cancel{N} \text{ X } 0.5}{65.71 \cancel{N}} = 0.2282$$

α = ángulo cuyo seno = 0.2282 = 13.2 °

Vectores

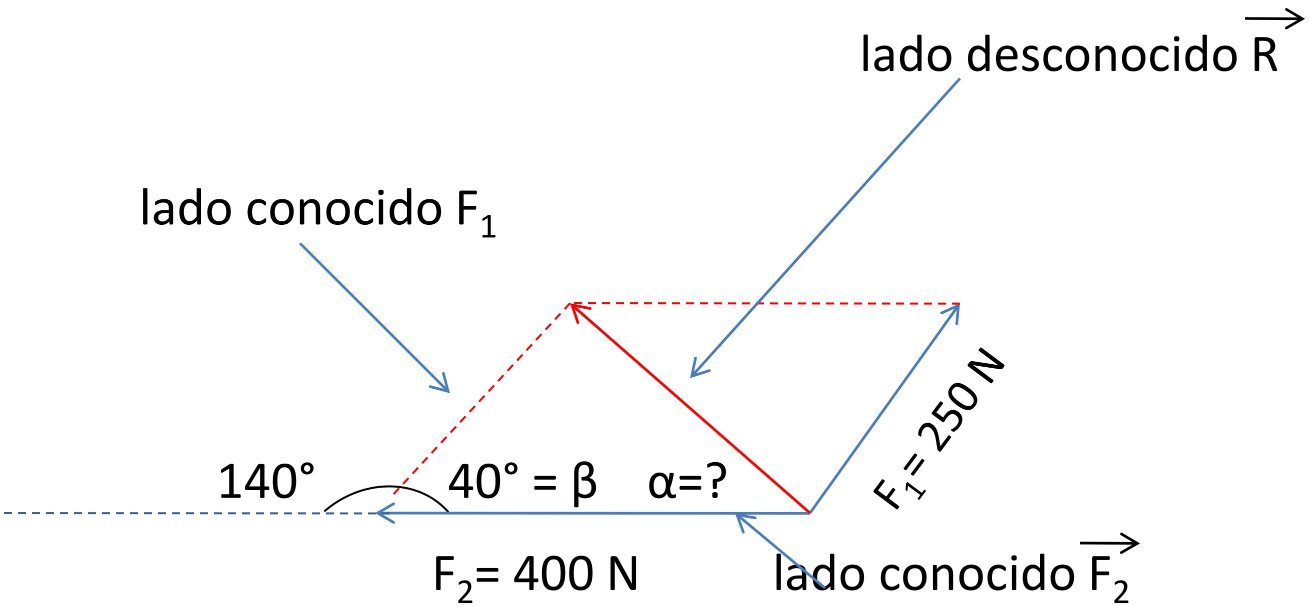
2. En la siguiente suma de vectores, encontrar por el método gráfico y analítico la magnitud de la resultante y el ángulo que forma con el eje horizontal.

   Escala: 1 cm= 100 N



Problemas resueltos

- Solución método gráfico:



PROBLEMAS RESUELTOS

- Método analítico:

  Para la ley de los cosenos se debe utilizar el ángulo formado por los dos lados conocidos en el triángulo oblicuo que se está considerando:

  Cálculo de la magnitud de la resultante:

$$R= \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2F_1F_2 \cos 40°} \quad =$$

$$R = \sqrt{(250\ N)^2 + (400\ N)^2 - 2(250\ N)(400\ N)\ (.7660)}$$

$$R = \sqrt{62500\ N^2 + 160000\ N^2 - 2(76600\ N^2)} = \boxed{R= 263.25\ N}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- Cálculo del ángulo que forma con la resultante:

$$\frac{F_1}{\text{sen }\alpha} = \frac{R}{\text{sen }\beta} \qquad \text{sen }\alpha = \frac{F_1 \text{ sen }\beta}{R}$$

Sustitución:

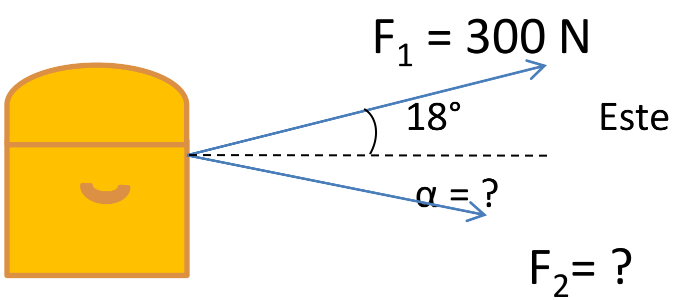
$$\text{sen }\alpha = \frac{F_1 \text{ sen }\beta}{R}$$

$$\text{sen }\alpha = \frac{250\cancel{N} \times .6428}{263.25\cancel{N}} = 0.6104$$

α = Ángulo cuyo seno es 0.6104= $\alpha = 37.6°$

PROBLEMAS RESUELTOS

3. Dos personas jalan con una cuerda cada una, un baúl de madera, como se puede apreciar en la figura. Una de las personas aplica una fuerza F_1 cuya magnitud es de 300 N, con un ángulo de 18° respecto al este. Determinar gráfica y analíticamente, la magnitud de la fuerza F_2 que debe aplicar la otra persona y el ángulo que debe formar respecto al este, para que el baúl se desplace hacia el este con una magnitud de fuerza resultante de 450 N.



Problemas resueltos

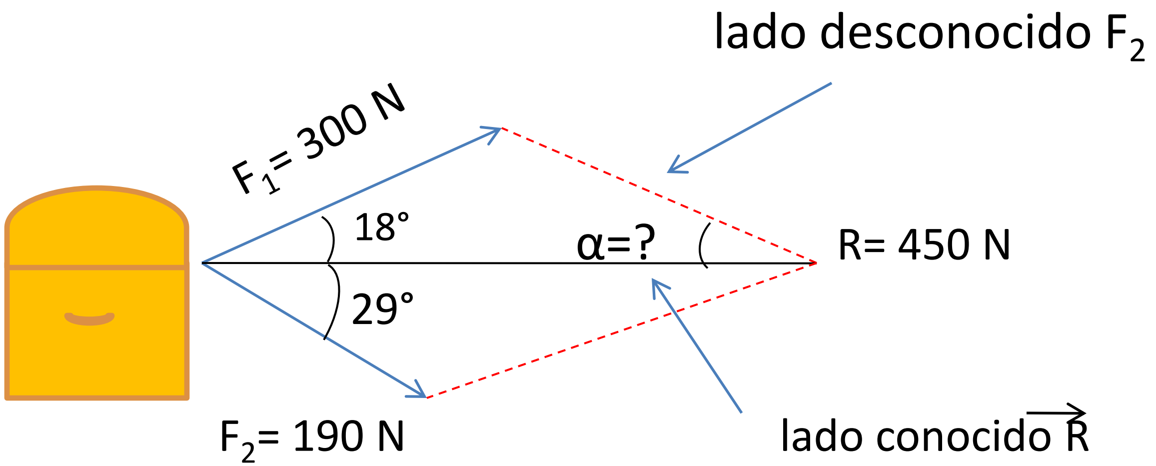
- Solución por el método gráfico:

  Se establece la escala adecuada: 1 cm= 100 N.

  Se traza la fuerza F_1 de 300 N con un ángulo de 18° respecto al este. Después se traza la resultante $\overrightarrow{R}$ cuya magnitud es de 450 N dirigida al este. Se une el extremo de $\overrightarrow{F_1}$ con el extremo de $\overrightarrow{R}$ y esta línea representará la paralela de la fuerza $\overrightarrow{F_2}$ buscada. Se mide su magnitud y el ángulo formado con respecto al este. Se traza con estos datos la fuerza $\overrightarrow{F_2}$ y se encuentra una magnitud 190 N con un ángulo α de 29° respecto al este, como se muestra en la figura.

PROBLEMAS RESUELTOS

- Figura: para resolver por el método analítico:



PROBLEMAS RESUELTOS

- Se desconoce F_2 y se conoce F_1 y R, por lo que se aplica la ley de los cosenos, si se sabe que el ángulo formado por los dos lados conocidos en el triángulo es de 18°

$$F_2 = \sqrt{F_1^{\,2} + R^2 - 2F_1R\cos 18°}$$

Sustitución:

$$F_2 = \sqrt{(300\ N)^2 + (450\ N)^2 - 2(300\ N)(450\ N)(0.9511)}$$

$$F_2 = \sqrt{90000\ N^2 + 202500\ N^2 - 256797\ N^2} = \sqrt{35703\ N^2} =$$

$F_2=$ F2= 188.95 N

PROBLEMAS RESUELTOS

- Cálculo del ángulo alfa que forma F_2 aplicando la ley de los senos:

$$\frac{F_1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{F_1}{\text{sen}\,18°} \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{F_1\,\text{sen}\,18°}{F_2}$$

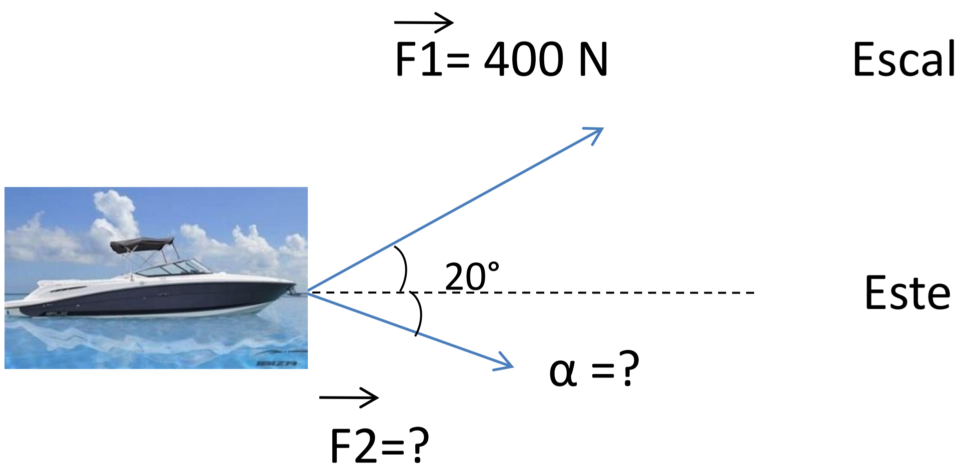
Sustitución:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{300\,\cancel{N}\ \cancel{X}\ 0.3090}{188.95\,\cancel{N}} = 0.4906$$

α = ángulo cuyo seno es 0.4906 = $\boxed{\alpha = 29.4°}$

Problemas resueltos

4. Determinar por los métodos gráfico y analítico la magnitud de la fuerza F2 y el ángulo correspondiente para que la lancha de la figura se mueva hacia el este con una fuerza resultante de 650 N.

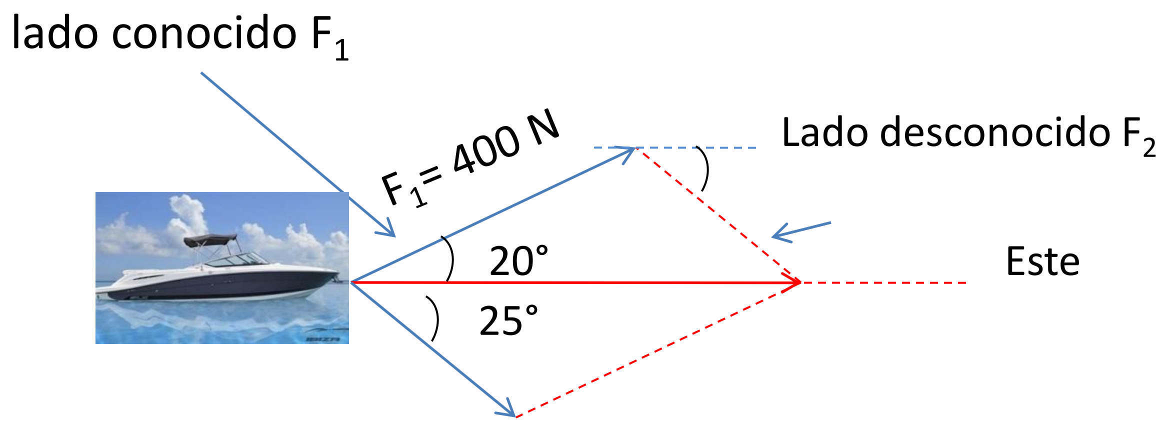


Escala: 1 cm= 100 N

PROBLEMAS RESUELTOS

- Para encontrar la magnitud de la fuerza $\overrightarrow{F_2}$ por el método gráfico se establece la escala conveniente . Se traza la fuerza F_1 de 400 N con un ángulo de 20° respecto al este. Después se traza la resultante $\overrightarrow{R}$ cuya magnitud es de 650 N dirigida al este. Se une el extremo de $\overrightarrow{F_1}$ con el extremo de $\overrightarrow{R}$ y esta línea representará la paralela de la fuerza $\overrightarrow{F_2}$ buscada. Se mide su magnitud y el ángulo formado con respecto al este. Con estos datos se traza la fuerza F_2 y se encuentra una magnitud de 306.5 N con un ángulo α de 26.5° respecto al este, como se muestra en la figura.

PROBLEMAS RESUELTOS



Se obtiene la magnitud de F_2= 306.4 N y el ángulo α = 26.5°

PROBLEMAS RESUELTOS

- Solución por el método analítico:

  Se desconoce F_2 y se conoce F_1 y R. Aplicando la ley de los cosenos se sabe que el ángulo formado por los dos lados conocidos es el triángulo de 20° .

$$F_2 = F_1^2 + R^2 - 2\,F_1 R \cos 20°$$

Sustituyendo:

$$F_2 = \sqrt{(400\ \mathrm{N})^2 + (650\ \mathrm{N})^2 - 2(400\ \mathrm{N})(650\ \mathrm{N})\ 0.9397}$$

$$F_2 = (160000\ \mathrm{N}^2 + 422500\ \mathrm{N}^2) - 488644\ \mathrm{N}^2$$

$$\boxed{F_2 = 306.4\ \mathrm{N}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- Cálculo del ángulo α que forma F_2 aplicando la ley de los senos:

$$\frac{F_1}{\text{sen } \alpha} = \frac{F_1}{\text{sen } 20°} \qquad \text{sen } \alpha = \frac{F_1 \text{ sen } 20°}{F_2}$$

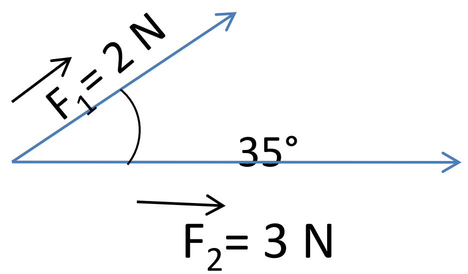
Sustituyendo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{400 \text{ N} \quad x\ 0.3420}{306.4 \text{ N}} = 0.446475$$

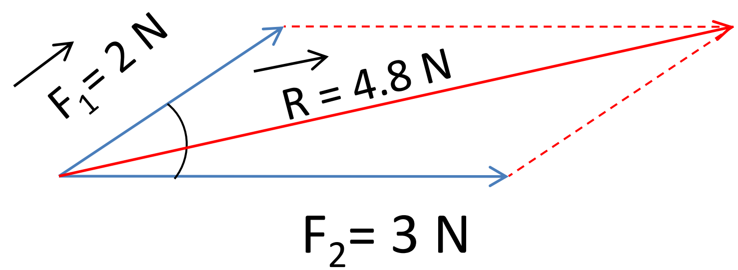
ángulo cuyo seno= 0.446= $\boxed{\alpha = 26.5°}$

PROBLEMAS RESUELTOS

a)



Solución por método gráfico:



$\alpha = 14°$

PROBLEMAS RESUELTOS

- Solución por el método analítico:

$$R= \quad F_1{}^2 \; + \; F_2 \; - 2F_1F_2 \cos \beta$$

$$R= \; (2\ N)^2 \; + \; (3\ N)^2 - 2(2\ N)(3\ N) \cos 145° \; =$$

$$R= \sqrt{4\ N^2 \; + \; 9\ N^2 \; - \; 2(6\ N)^2\ 0.81915}$$

$$R= \sqrt{13\ N^2 + 9.83\ N^2} = \sqrt{22.83\ N^2} \; = \quad \boxed{R = 4.78\ N}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- Para calcular el ángulo alfa se aplica la ley de senos:

$$\frac{F_1}{\text{sen } \alpha} = \frac{R}{\text{Sen } \beta}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{F_1 \text{ sen } \beta}{R}$$

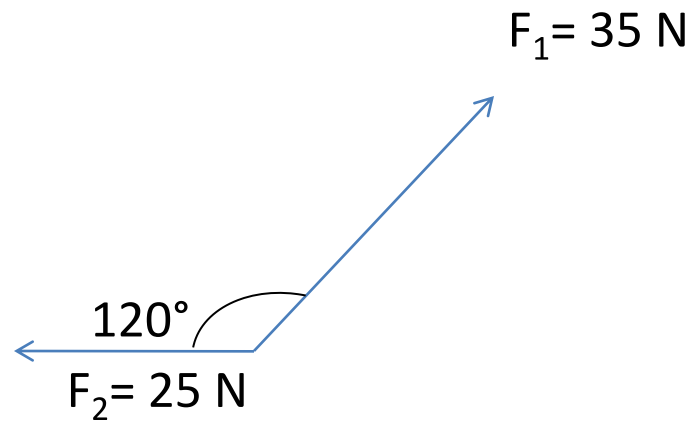
Sustituyendo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{2\text{ N x sen } 145°}{4.78\text{ N}} = 2\text{ N X} \quad 0.5736 = 0.24$$

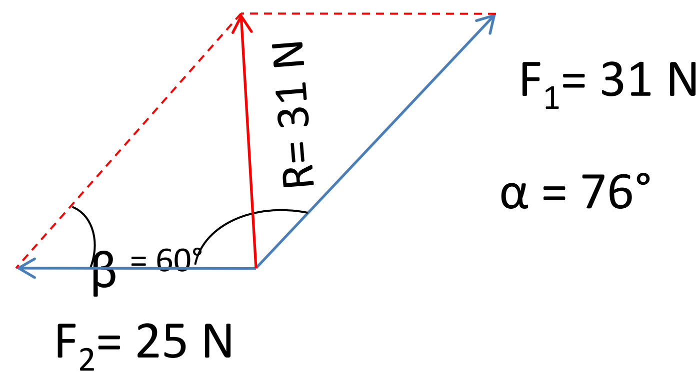
El ángulo cuyo sen =0.24= $\alpha = 13.9$

Problemas resueltos

b)



c) Solución por el método gráfico:



PROBLEMAS RESUELTOS

- Solución por el método analítico:

  Para la ley de cosenos se debe utilizar el ángulo formado por los dos lados conocidos en el triángulo oblicuo que se está utilizando.

  Cálculo de la resultante:

$$R = F_1 + F_2 - 2F_1F_2 \cos 60°$$

$$R = (35\ N)^2 + (25\ N)^2 - 2(35\ N)(25\ N)\ 0.5$$

$$R = 1225\ N^2 + 625\ N^2 - 875\ N^2$$

$$R = \sqrt{975\ N^2} = \boxed{R = 31.22\ N}$$

PROBLEMA RESUELTO

- Cálculo del ángulo:

$$\frac{F_1}{\text{sen } \alpha} = \frac{R}{\text{sen } \beta} \qquad \text{sen } \alpha = \frac{F_1 \text{sen } \beta}{R}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{35 \text{ N} \times \text{sen } 60°}{31.22 \text{ N}}$$

sen α = 0.97085

ángulo cuyo seno= 0.97085= $\boxed{\alpha = 76.1°}$

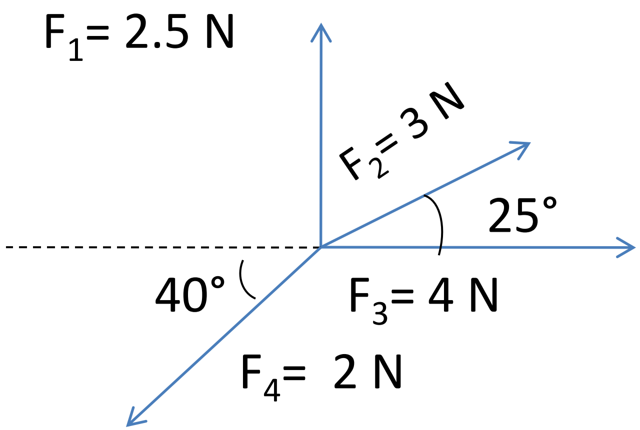
Problemas resueltos

- Suma de más de dos vectores angulares o concurrentes.

  Método gráfico del polígono: para sumar más de dos vectores concurrentes en forma gráfica, se utiliza el llamado método del Polígono. Dicho método consta en trasladar paralelamente a sí mismo cada uno de los vectores sumados, de tal manera que al tomar uno de los vectores como base , los otros se colocarán uno a continuación del otro, poniendo el origen de un vector en el extremo del otro, y así sucesivamente, hasta colocar el último vector. La resultante será el vector que una el origen de los vectores con el extremo libre del último vector sumado, y su sentido estará dirigido hacia el extremo del último vector.

SUMA DE MÁS DE DOS VECTORES ANGULARES O CONCURRENTES

1. Encontrar en forma gráfica y analítica la magnitud de la resultante de la suma de los siguientes vectores. También determina el ángulo que forma la resultante con respecto al eje horizontal.

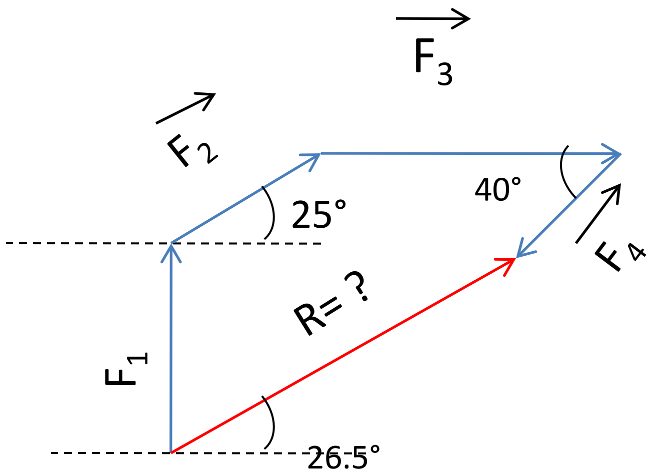


PROBLEMAS RESUELTOS

- Solución por el método gráfico del Polígono:

  Para hallar la magnitud de la resultante, podemos tomar como base cualquiera de los cuatro vectores. Si tomamos a $\vec{F}_1$ entonces trazamos el origen de $\vec{F}_2$ al extremo de $\vec{F}_1$; el origen de $\vec{F}_3$ al extremo de $\vec{F}_2$, y el origen de $\vec{F}_4$ al extremo de $\vec{F}_3$. La resultante será el vector que una el origen de $\vec{F}_1$ con el extremo de $\vec{F}_4$.

PROBLEMAS RESUELTOS



R= 5.6 N

ángulo α = 25.6°

Problemas resueltos

Para encontrar la magnitud de la resultante por el método analítico se procede de la siguiente manera:

Paso 1: se descompone cada vector en sus componentes rectangulares.

Paso 2: se calcula la magnitud de la componente en X, usando la función coseno y la magnitud de la componente en y, con la función seno para cada vector. Si la componente es horizontal a la derecha o vertical hacia arriba, es positiva. Si la componente es horizontal a la izquierda o vertical hacia abajo es negativa.

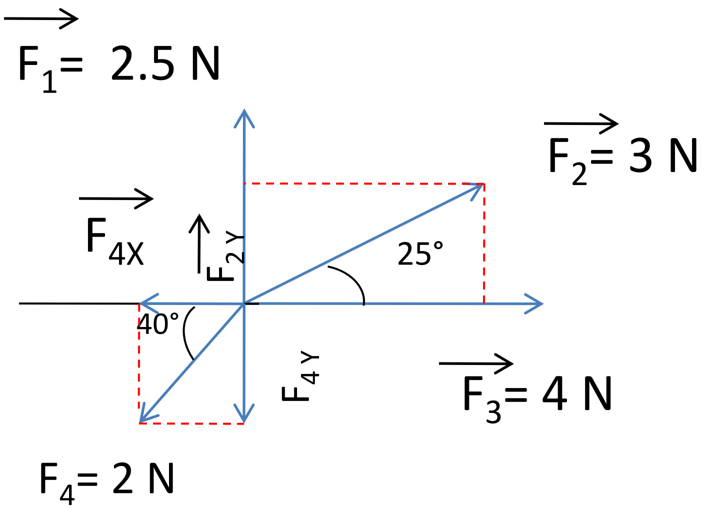
Paso 3. al conocer las magnitudes de todas las componentes en x y en y para cada vector, se realiza la suma de las componentes en x y en y, de tal manera que el sistema original de vectores se reduzca a dos vectores perpendiculares: uno, representando la magnitud de la resultante de todas las componentes en x y otro representando la magnitud de la resultante de todas las componentes en y.

Problemas resueltos

Paso 4: se obtiene la magnitud de la resultante de los dos vectores perpendiculares utilizando el teorema de Pitágoras.

paso 5: el ángulo que forma la resultante con la horizontal se calcula utilizando la función tangente:

Problemas resueltos



PROBLEMAS RESUELTOS

Al trazar las componentes rectangulares para cada vector se tiene que:

$\vec{F_1}$= está por completo sobre el eje vertical positivo por lo que no tiene componente horizontal.

$\vec{F_2}$= tiene componente vertical y horizontal, ambas son positivas.

$\vec{F_3}$= está sobre el eje horizontal positivo, por lo que no tiene componente vertical.

$\vec{F_4}$= tiene componente horizontal y componente vertical, ambas son negativas.

PROBLEMAS RESUELTOS

- Cálculo de las magnitudes de las componentes de cada vector:

$$\overrightarrow{F_1} = F_{1x} = 0$$

$$F_{1Y} = F_1 = 2.5\ N$$

$$\overrightarrow{F_2}: F_{2X} = F_2 \cos 25° = 3\ N \times 0.9063 = 2.7189\ N$$

$$\overrightarrow{F_3}: F_{3X} = F_3 = 4\ N$$

$$F_{3Y} = 0$$

PROBLEMAS RESUELTOS

F_4: $-F_{4X} = -F_4 \cos 40° = -2\ N \times 0.7660 = -\ 1.532\ N$

$-F_{4Y} = -F_4 \text{ sen } 40° = -2\ N \times\ 0.6428 = 1.2856\ N$

Cálculo de la magnitud de la resultante de la suma de todas las componentes en el eje x, es decir, Rx:

$Rx = \sum F_X = F_{2X} + F_{3X} + (-F_{4X}) = (2.7189\ N + 4\ N) + (-1.532\ N)$

$R_X = 5.1869\ N$ Es positiva, ya que es horizontal hacia la derecha.

PROBLEMAS RESUELTOS

- Cálculo de la magnitud de la resultante de la suma de todas las componentes en el eje y, es decir, Ry:

$$Ry= \sum FY= F_{1Y} + F_{2Y} + (-F_{4Y})$$

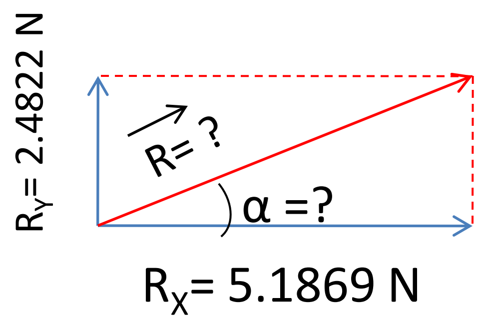
En función de sus magnitudes y tomando en cuenta sus sentidos:

$$Ry= 2.5 \text{ N} + 1.2678 \text{ N} - 1.2856 \text{ N}= 2.4822 \text{ N}$$

Es positiva porque es vertical hacia arriba.

Problemas resueltos

- Rx y Ry se redujo a dos vectores rectangulares:



La magnitud de la resultante se calcula por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad c = (5.1869\ N)^2 + (2.4822\ N)^2$$

$$C = \sqrt{33.06\ N^2} = 5.75\ N = \vec{R} = 5.75\ N$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- Determinación del ángulo:

$$\tan \alpha = \frac{Ry}{Rx} = \frac{2.4822\ \cancel{N}}{5.1869\ \cancel{N}} = 0.47855$$

α = Ángulo cuya tangente es 0.4785= 25.6°

BIBLIOGRAFÍA

- Física para Bachillerato
  Pérez Montiel, Héctor.
  Editorial: Patria
  2011

- Física general con experimentos
  Alvarenga, Beatriz. Máximo, Antonio.
  Editorial: Oxford.
  2014